# ON THE DIGITAL STRUCTURE OF NUMBERS

## AN ESSAY ON THE GENERALIZATION

## OF THE "1089 TRICK" FOR ANY DIGITAL LENGTH

**BY THE INVENTOR AND CIVIL ENGINEER CONSTANTINOS PAPADAKIS, PhD**

Reproduction of the Original,
Published in Greek, Athens 1982

With an introduction in English by Yannis Almirantis[1] and Wentian Li[2, 3]

1. Theoretical Biology and Computational Genomics Group, Institute of Bioscience and Applications, National Center for Scientific Research "Demokritos", 15341 Athens, Greece

Email address: yalmir@bio.demokritos.gr

2. Department of Applied Mathematics and Statistics, Stony Brook University, Stony Brook, NY, USA

3. The Robert S. Boas Center for Genomics and Human Genetics.

Email address: wtli2012@gmail.com

# Introduction

***The '1089 trick': the way C. Papadakis attempted its earliest generalization for integers of any number of digits. A few samples from his monograph are provided as examples of his work, along with some comments on the related literature***.

Books and websites introductory to the 'strange and seductive world of mathematics', see e.g., refs [1], [2], often mention the so-called '1089 trick' as a mathematical curiosity*: if you revert any three-digit physical number, as far as its first and last digits differ by 2 or more, subtract the smaller from the larger in this couple, revert the obtained number again and add, the result will always be 1089*.

To the best of our knowledge, the earliest attempt to generalize the '1089 trick' to any digital length is due to Constantinos Papadakis, a Greek engineer and inventor, who included it in a related monograph, four decades ago [3]. Here we attempt a short introduction to this work and we are going to upload it on the Internet along with the original, for historical reasons.

While staying within the set of three-digit integers, 1089 is the only outcome. However, it is easy to check that larger input numbers lead to other integers also, which however are very scarce. Additionally, they dispose of some very specific features. R. Webster presented in 1995 a systematic formal study of the full problem, i.e. an in-depth characterization of the possible outcomes of the sequence of: *digital reversion – subtraction – digital reversion – addition*, starting from integers of any digital length [4]. Webster's work concluded that the population of numbers resulting from this procedure goes as follows: for 2-digit input numbers is one: 99; for 3-digit numbers is again one: 1089 = 99x11; for 4-digit numbers, possible outcomes are three: 9999=99x101, 10980=99x110, and 10989=99x111. Continuing we find that there are again three outcomes if the initial numbers have 5 digits, for 6- and 7-digit input numbers they are eight, and for every two next digital lengths the populations of resulting numbers are 21, then 55, and so on, i.e. *the populations of (what Webster named) 'end numbers' as a function of the initial number's length are the odd-order members of the Fibonacci sequence, each repeated twice*. He also derived that these end numbers are composed only by the digits 0, 1, 8, and 9, they always are integral multiples of 99, and that the corresponding quotients are integers composed uniquely by zeros and ones. Webster named them '(truncated) *codes*' of the corresponding input numbers. It goes without saying that many input numbers correspond to each end number or code.

Recently, the present authors published a work [5], where they generalized this two-operation procedure of the (generalized to any digital length) 1089 trick in the form of an iterative procedure with an unlimited number of steps, endowing the initial procedure with a suitable rule for the alternation of subtractions and additions. This iterative procedure exhibits several novel properties as it shares features of discrete dynamical systems, but it is beyond this short introduction to delve into that material. [5] also includes an analytical presentation of the properties and features of the generalized for any digital length 1089 trick, where we also address

the interested reader for further aspects of this problem. Note that the integers named by Webster ‘end-numbers’ and ‘codes’ have been named in [5] ‘Papadakis-Webster integers’ and ‘Papadakis-Webster binary strings’ respectively.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

On page 35 and in continuation on page 36, of Papadakis’s monograph, we find the rule on how from any (input) number we can produce (compose digit by digit) the product of the ‘generalized 1089 trick’ without executing the arithmetic operations, only based on of the three possible relationships {**>**, **=**, **<**} within every pair of symmetric digital positions of the input number. This rule may be described as follows:

We write below the digits of any given (input) integer C one of the above three symbols, depending on the relative size of the digit above the symbol and the one in the symmetric position, according to the following example:

```
C   =          8 7 2 4 1 6 5 9 5 1 4 2 2 8 0
               >,<,=,>,<,>,=,|,=,<,>,<,=,>,<
f   =           1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1
```

In order to compose f (what we call ‘Papadakis-Webster binary string’) we always start with a unity at the leftmost digital position. Then, every digit of the binary string under construction between the ‘spout’ of symbol **<** and the spout of symbol **>** takes the value 0, even if in between **<** and **>** are one or several symbols ‘**=**’. This means that only **>** (and not **=**) can put an end to the train of zeros started due to a ‘**<**’. The construction of f above serves as an example.

On the same page, Papadakis uses the example of the 15-digit integer we have shown above applying the aforementioned rule, and then, he verifies that this is the correctly predicted ‘digital string’ by executing explicitly the operations of the ‘generalized 1089 trick’:
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

C = 8 7 2 4 1 6 5 9 5 1 4 2 2 8 0

>.<.=.>.<.>.=. | .=.<.>.<.=.>.<

f = 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1

14 = ν−1 ψηφία

'Επαλήθευση δι' ἀναστροφῆς :

| | | |
|---|---|---|
| C | = | 872416595142280 |
| − Ɔ | = | 082241595614278 |
| D | = | 790174999528002 |
| + Ɑ | = | 200825999471097 |
| Σ | = | 991000998999099 = 99·f = 99 × 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 |

ν=15 ψηφία

---

On page 8 we find the calculation of *an upper bound* for the population of the Papadakis-Webster Integers, or rather of the corresponding binary strings, based on the dependence of their population on the three possible relationships {>, =, <} within every pair of symmetric digital positions in any initial (input) integer. The following short text in Greek says in brief: the number of the 'permutations with repetition' of three symbols for n positions of the 'leftmost' half except the first digit, of an integer with 2(n+1) or 2(n+1) + 1 digits, is $\mathbf{3^n}$.

§28 'Η ἀπάντηση στό πρῶτο ἐρώτημα εἶναι :

Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν ἤ ἀκριβέστερα, τῶν διατάξεων "μετ' ἐπαναλήψεως", τριῶν συμβόλων (= , > , < ) γιά n θέσεις ἐσωτερικῶν ἀριστερῶν ψηφίων (§14 καί §23 ·3), δίδεται ἀπό τόν γνωστό τύπο

$${}_{R}A^{n}_{m=3} = m^{n} = 3^{n}$$

Obviously, this upper bound does not suffice to produce the rule provided by Webster in 1995, where he determined the dependence of the population of 'end numbers' per digital length, based on the Fibonacci sequence, but it was a first approximation of the exact final expression.

---

In the following snapshot from page 34 of Papadakis' monograph, in the column before the last are depicted the Papadakis-Webster integers when the sets of all 6- and 7-digit integers have served as input for the "generalized 1089 trick". In the last column, the same numbers have been shown, as products of 99 times the corresponding Papadakis-Webster binary strings.

| | $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5\ \psi_6$ | 6 | 2 | 9 | 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = = | | | | | $10^2 \times 45^1$ | 1099989 | = | 99 × 11111 ◀ |
| 2 | > = | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 1099890 | = | 99 × 11110 |
| 3 | = > | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 1098900 | = | 99 × 11100 |
| 4 | > > | | | | | $10^0 \times 45^3$ | | | |
| 5 | = < | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 1090089 | = | 99 × 11011 |
| 6 | > < | | | | | $10^0 \times 45^3$ | 1089990 | = | 99 × 11010 |
| 7 | < > | | | | | $10^0 \times 45^3$ | 999999 | = | 99 × 10101 |
| 8 | < < | | | | | $10^0 \times 45^3$ | 991089 | = | 99 × 10011 |
| 9 | < = | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 990099 | = | 99 × 10001 |

| | $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5\ \psi_6\ \psi_7$ | 7 | 2 | 9 | 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = = | | | | | $10^3 \times 45^1$ | 10999989 | = | 99 × 111111 ◀ |
| 2 | > = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 10999890 | = | 99 × 111110 |
| 3 | = > | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 10998900 | = | 99 × 111100 |
| 4 | > > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | |
| 5 | = < | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 10891089 | = | 99 × 110011 |
| 6 | > < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 10890990 | = | 99 × 110010 |
| 7 | < > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 10008999 | = | 99 × 101101 |
| 8 | < < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 9901089 | = | 99 × 100011 |
| 9 | < = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 9900099 | = | 99 × 100001 |

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Although a full translation in English of the work of Constandinos Papadakis would perhaps be useful for historically minded readers, we hope that, by presenting here only the above few examples of Papadakis's writing, we have made obvious to the non-Greek speaking reader that this author had, already at the beginning of the eighties, outlined the full set of properties of this intriguing problem, although his proofs were in some instances amateurish and incomplete. A publication in English at that time of Papadakis's work would certainly have catalyzed the interest of professional number theorists in this problem. Perhaps, this would have accelerated its incorporation within 'true mathematics', instead of being considered only a mathematical curiosity. Furthermore, we hope that the work presented herein along with cited references contributes to strengthening the argument presented by Lora Pudwell, and epitomized in the title of her relevant article [6]: '*Digit reversal without apology*'. This title alludes to the famous autobiographical book '*A Mathematician's Apology*' [7], where Thomas Hardy commented that: "8712 and 9801 are the only four-figure numbers which are integral multiples of their reversals", continuing that: "this is not a serious theorem, as it is not capable of any significant generalization". We will agree with Pudwell that the great mathematician here may have been somewhat short-sighted. We refer our readers to [6] for related works mentioned by Pudwell, while there are also other interesting articles too, referring to digital reversal and palintiple numbers, e.g. [8-10].
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

*Acknowledgment*: We would like to thank Mrs. Maria Metaxa and Mr. Michael Metaxas for providing us with a copy of the now rare monograph of C. Papadakis from a University Library and for the scan that produced the pdf of the original book we present herein.

## REFERENCES

[1] Acheson, D. (2002) *1089 and All That: A Journey into Mathematics*'. Oxford Univ. Press, UK.

[2] https://math.hmc.edu/funfacts/magic-1089/ (Accessed November 12th, 2024).

[3] Papadakis, C. (1982). *The digital structure of numbers*. Athens. *In Greek.*

[4] Webster, R. (1995) A Combinatorial Problem with a Fibonacci Solution, *The Fibonacci Quarterly* **33**, 26-31

[5] Almirantis, Y. and Li, W. (2024) Extending 1089 attractor to any number of digits and any number of steps. https://arxiv.org/pdf/2410.11784

[6] Pudwell, L. (2007) Digit reversal without apology. *Math. Mag.* **80**, 129-132.

[7] Hardy, G.H. (2012) *A Mathematician's Apology* [1st pub. 1940, with foreword 1967. With a foreword by C. P. Snow. Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Hoey, D. J. (1992) Untitled online article (not peer-reviewed):

http://djm.cc/rpa-output/arithmetic/digits/palintiples.s (Accessed March 15th, 2024)

[9] Holt, B. V. (2014). Some general results and open questions on palintiple numbers. *Integers* **14**, #$A42; 1-13.

[10] Holt, B. V. (2021). Some Thoughts on Determining Symmetric Palintiples. arXiv:1410.2356v2iv:14

ΚΩΝΣΤ. ΝΙΚ. ΠΑΠΑΔΑΚΗ, ΔΡΟΣ ΜΗΧ.
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ Ε.Μ.Π.

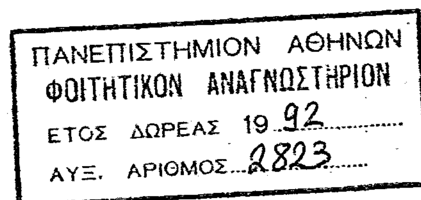
# Η ΨΗΦΙΑΚΗ ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## (ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ)

ΑΠΟΚΑΛΥΨΗ ΑΓΝΩΣΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ, 1 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1982

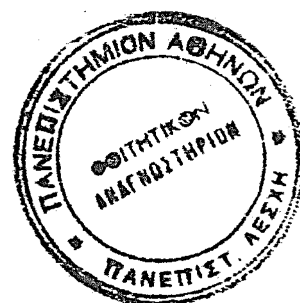
ΚΩΝΣΤ. ΝΙΚ. ΠΑΠΑΔΑΚΗ, ΔΡΟΣ ΜΗΧ.
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ Ε.Μ.Π.




# Η ΨΗΦΙΑΚΗ ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## (ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ)

ΑΠΟΚΑΛΥΨΗ ΑΓΝΩΣΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ




ΑΘΗΝΑΙ, 1 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1982

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Π ρ ό λ ο γ ο ς

Μ Ε Ρ Ο Σ **Α!** Α Κ Ε Ρ Α Ι Ο Ι Α Ρ Ι Θ Μ Ο Ι

ΚΕΦ. 1 Ε Π Ε Ξ Η Γ Η Σ Ε Ι Σ Κ Α Ι Ο Ρ Ο Ι

"Ορθιοι, ἰσοσκελεῖς, ὑποτελεῖς ἀκέραιοι (§2,4,6) καί τό πλῆθος τους (§3,5,7) (θετικοί) — 'Αρτιοψήφιοι καί περιττοψήφιοι (§8,9) — Κεντρικός ἄξων ἀκεραίου (§13) — 'Αριστερά καί δεξιά ἐσωτερικά ψηφία (§14,15).

ΚΕΦ. 2 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΕΝΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ

Συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα ψηφία (§19) — 'Η δυνατότης συγκρίσεως τιμῆς ἑνός ἀριστεροῦ ψηφίου ὡς πρός τό συμμετρικό του (ἴσο = , μεγαλύτερο ἀπό >, μικρότερο ἀπό <) (§20 ἕως 23).

ΚΕΦ. 3 Ο Ι Ψ Η Φ Ι Α Κ Ο Ι Σ Υ Ν Δ Υ Α Σ Μ Ο Ι

Οἱ μετ' ἐπαναλήψεως συνδυασμοί (ἤ διατάξεις), πλήθους $3^n$, τῶν τριῶν συμβόλων συγκρίσεως (=,>,<) στίς n θέσεις τῶν ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων (§24 ἕως 28) — Τό πλῆθος μ τοῦ ὑποσυνόλου τῶν ἀκεραίων πού ἀκολουθοῦν μιά ἐκ τῶν $3^n$ διατάξεων συμβόλων καί τό θεώρημα πού παρέχει αὐτό τό πλῆθος μ ἤ μ' τῶν ἀρτιοψηφίων ἤ περιττοψηφίων, ἀντιστοίχως, γιά κάθε διάταξη συμβόλων (§29) — 'Η ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος (§32) — Τό πόρισμα (§30) πού δικαιολογεῖ τό πλῆθος μ' ὡς δεκαπλάσιο τοῦ μ — Παραδείγματα (§31).

ΚΕΦ. 4 ΟΙ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

Διερεύνηση τοῦ τύπου μ τῆς §29 καί ὁ ἐκθέτης p (§34) — 'Ισοδύναμες διατάξεις ἐκεῖνες πού παρέχουν τήν ἴδια τιμή τοῦ p ἄρα καί τό ἴδιο πλῆθος μ (§37) — Οἱ ὁμάδες τῶν ἰσοδυνάμων διατάξεων μέσα στό συνολικό πλῆθος διατάξεων $3^n$ (§38) — Τό θεώρημα πού παρέχει τό πλῆθος n+1 τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων συμβόλων ἐντός τῶν n ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων, σύμφωνα μέ τό κατά τόν τύπο τοῦ Νεύτωνος ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου $(1+2)^n$ (§41) — 'Η ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος (§43) — Παράδειγμα ἐπί 10-ψηφίου (§42) — Γενική ἐφαρμογή (§45) — 'Η γένεση ἀπείρου πλήθους διωνύμων $(\kappa+\lambda)^n$ ἀπό διδόμενο ἀρχικό $(\alpha+x)^n$ (§45 ·9, ·10) — 'Η μετατροπή τοῦ διωνύμου $(1+\alpha)^n$ σέ δύναμη $10^n = (1+9)^n$ (§45 ·11).

ΚΕΦ. 5 Α Ν Α Σ Τ Ρ Ο Φ Ο Ι Κ Α Ι Σ Τ Α Θ Μ Ε Σ

'Ο ἀνάστροφος Ͻ διδομένου ἀκεραίου C, ἡ διαφορά τους D (= C−Ͻ) (θετική), ὁ ἀνάστροφος της Ͼ καί τό ἄθροισμα D+Ͼ = Σ ἡ σ τ ά θ μ η τοῦ C, κοινή γιά ὅλους τούς ἀκεραίους πού ἀκολουθοῦν τήν ἴδια διάταξη συμβόλων (§46,47) — Τό θεώρημα (§47) περί τῶν ἀναστρόφων — Παραδείγματα καί διευκρινίσεις (§48) — 'Η ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τῆς §47 μέ τό τέχνασμα τῆς "προσθαφαιρέσεως" δυνάμεων τοῦ 10 ἐπί τῶν προσθετέων πού συγκροτοῦν τόν C (§49) — Οἱ 11 ἰδιότητες πού ἐμφανίζει ἡ κάθε στάθμη Σ καί οἱ 3 ἰδιότητες τῆς κάθε διαφορᾶς D=C−Ͻ (§50) — 'Η νομοτέλεια πού συνδέει ἕνα διδόμενο ψηφιακό συνδυασμό μέ τήν στάθμη Σ καί ὁ Κανών ἀμέσου εὑρέσεως τῆς Σ χωρίς τίς ἀναστροφές, μετά παραδείγματος (§54) — 'Η ἀνάλυση κάθε στάθμης Σ σέ γινόμενο 99·f καί ὁ χαρακτήρας τοῦ παράγοντος f (§53) — Εἰσαγωγή νέων μεθόδων ἐλέγχου ἀκριβείας τῶν συνήθων ἀριθμητικῶν πράξεων (προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ)(§50 ·15, ·16, ·17, ·18) — Πίναξ γιά ν-ψηφίους ὀρθίους ἀκεραίους (§53).

## ΜΕΡΟΣ Β΄ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### ΚΕΦ. 1 ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΟΙ

Ἡ μαθηματική ἔκφραση τῶν δεκαδικῶν (θετικῶν) καί ἡ καθιέρωση τῆς γραφῆς τους σύμφωνα μέ τήν γραφή τῶν ἀκεραίων (§57) — Γνήσιοι καί πλαστοί δεκαδικοί (§59,60) — Μεταλλαγή γνησίων σέ ἰσοτίμους πλαστούς καί ἀντιστρόφως (§60 ·2) — Δέν περιλαμβάνονται στήν ἔρευνα οἱ περιοδικοί καί οἱ ἀσύμμετροι (§61) — Ἡ ἐπίτευξη συμμετρίας στήν ἐμφάνιση δεκαδικοῦ διά τῆς προσθήκης (ἐάν ἀπαιτεῖται) μηδενικῶν, ὥστε νά προκύπτει ἑκάστοτε ἰσομερής ἀρτιοψήφιος ἰσότιμος πλαστός (§62,63) — Ὄρθιοι, ἰσοσκελεῖς καί ὑποτελεῖς ἰσομερεῖς δεκαδικοί (§66, 67,69) καί τό πλῆθος τους (§66 ·1,§67 ·1, §70) — Ἀριστερά καί δεξιά ἐσωτερικά ψηφία ἑνός ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ (§72,73).

### ΚΕΦ. 2 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΕΝΟΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ

Τά συμμετρικά (κατά θέσιν) ὡς πρός τήν ὑποδιαστολή ψηφία ἑνός ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ (§75) — Τά σύμβολα συγκρίσεως (=,>,<) τῶν ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων μέ τά δεξιά (§76,77,78).

### ΚΕΦ. 3 ΟΙ ΨΗΦΙΑΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Οἱ μετ' ἐπαναλήψεως συνδυασμοί (ἤ διατάξεις), πλήθους $3^n$, τῶν συμβόλων (=,>,<) στίς n ἀριστερές ἐσωτερικές ψηφιακές θέσεις (§79,§80) — Τό πλῆθος μ τοῦ ὑποσυνόλου τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν οἱ ὁποῖοι ἀκολουθοῦν μιά ἐκ τῶν $3^n$ διατάξεων συμβόλων καί τό θεώρημα πού δίδει αὐτό τό πλῆθος μ γιά κάθε διάταξη (§82) — Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος (§83) — Παραδείγματα (§84).

### ΚΕΦ. 4 ΟΙ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

Διερεύνηση τοῦ τύπου μ τῆς §82 καί ὁ ἐκθέτης p (§85) — Ἰσοδύναμες διατάξεις ἐκεῖνες πού παρέχουν τήν ἴδια τιμή τοῦ p καί τοῦ πλήθους μ (§88) — Οἱ ὁμάδες ἰσοδυνάμων διατάξεων μέσα στό συνολικό πλῆθος διατάξεων $3^n$ (§89) — Τό θεώρημα πού παρέχει τό πλῆθος n+1 τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων συμβόλων, ἐντός τῶν n ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων, σύμφωνα μέ τό κατά τόν τύπο τοῦ Νεύτωνος ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου $(1+2)^n$ (§91) — Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος (§93) — Παράδειγμα σέ ἰσομερῆ 10-ψήφιο δεκαδικό (§92) — Γενική ἐφαρμογή (§94).

### ΚΕΦ. 5 ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΙ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΕΣ

Ὁ ἀνάστροφος Ͻ διδομένου ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ C, ἡ διαφορά τους D (= C-Ͻ) (θετική), ὁ ἀνάστροφος της Ͼ καί τό ἄθροισμα D+Ͼ = Σ ἤ σ τ ά θ μ η τοῦ C, κοινή γιά ὅλους τούς ἰσομερεῖς δεκαδικούς πού ἀκολουθοῦν τήν ἴδια διάταξη συμβόλων (§95,96) — Τό θεώρημα (§96) περί τῶν ἀναστρόφων τῶν δεκαδικῶν — Παραδείγματα καί διευκρινίσεις (§97) — Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τῆς §96 (§98) — Οἱ ἰδιότητες πού ἔχει ἡ κάθε στάθμη Σ καί ἡ κάθε διαφορά D = C-Ͻ (§99) — Εἰδικῶς ἡ διατύπωση τοῦ 4^ου^ πορίσματος γιά δεκαδικούς δίδεται στήν §99 — Ἡ νομοτέλεια συνδέσεως μιᾶς ψηφιακῆς διατάξεως μέ τόν σχηματισμό τῆς στάθμης Σ καί ὁ Κανών ἀμέσου εὑρέσεως τῆς Σ χωρίς τίς πράξεις ἀναστροφῆς (§102), μετά παραδείγματος — Εἰσαγωγή νέων μεθόδων ἐλέγχου ἀκριβείας τῶν συνήθων ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπί δεκαδικῶν (§99) — Πίναξ γιά ν-ψηφίους ὀρθίους ἰσομερεῖς δεκαδικούς (§101).

## Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Σ' αὐτή τή σύντομη μαθηματική πραγματεία ἐμφανίζονται καί διερευνῶνται μερικές ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων καί τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἰδιότητες οἱ ὁποῖες μέχρι σήμερα ἔμειναν -ὅπως προκύπτει ἀπό τήν προσιτή στόν συγγραφέα βιβλιογραφία- ἀφανεῖς.

'Η ἀνάπτυξη αὐτῶν τῶν ἰδιοτήτων ὁδηγεῖ σέ νομοτέλειες πού ἐνδέχεται νά ἐπιτρέψουν τήν ἔνταξη τοῦ πραγματευομένου θέματος στόν μεγάλο κλάδο τῆς Θεωρίας τῶν 'Αριθμῶν.

Γιά τή συντόμευση τοῦ κειμένου ἐκρίθη σκόπιμο νά εἰσαχθοῦν ἤ, ὀρθότερα, νά προταθοῦν νέοι ὅροι καί μερικές ἁπλές ἐπεξηγήσεις.

## Μ Ε Ρ Ο Σ Α΄ Α Κ Ε Ρ Α Ι Ο Ι Α Ρ Ι Θ Μ Ο Ι

### ΚΕΦ. 1 ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΟΙ

§1 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι

$$9 \times 10^{\nu-1} \qquad (\nu > 1)$$

[π.χ. οἱ 3-ψήφιοι εἶναι $9 \times 10^2 = 900$ (ἀπό 100 ἕως 999), οἱ 7-ψήφιοι εἶναι $9 \times 10^6 = 9000000$ (ἀπό 1000000 ἕως 9999999) κ.ο.κ.].

§2 Ὄ ρ θ ι ο ς ἀκέραιος ἄς κληθῆ ἐκεῖνος τοῦ ὁποίου τό πρῶτο ψηφίο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό τελευταῖο (π.χ. καθένας ἀπό τούς ἀκεραίους 100, 7345, 65 ).

§3 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ὀρθίων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι τό μισό τοῦ ὅλου πλήθους τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων (§1).
(π.χ. οἱ 7-ψήφιοι ὄρθιοι εἶναι $\frac{5}{10} \times 9 \times 10^{7-1} = 45 \times 10^5 = 4500000$ μεταξύ τοῦ ὅλου πλήθους τῶν 9000000 ἑπταψηφίων).

•1 'Απόδειξη : Ἔστω, σέ γενική περίπτωση, πώς ἕνας ν-ψήφιος ἀκέραιος παρίσταται μέ τή μορφή :

$$\psi_1 \; \psi_2 \; \psi_3 \cdots\cdots\cdots\cdots \psi_{\nu-2} \; \psi_{\nu-1} \; \psi_\nu$$

(μορφή πού δέν ἐκφράζει ἀριθμητική τιμή), μέ πρῶτο ψηφίο τό $\psi_1$. Καθένα ἀπό τά ἐσωτερικά του ψηφία (§10) $\psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_{\nu-2}, \psi_{\nu-1}$ μπορεῖ νά προσλάβει τιμή 0, 1, 2,………8, 9. Νά εἶναι δηλ. ἕνας ἀπό τούς 10 μονοψηφίους ἀριθμούς.

•2 Οἱ θέσεις πού καταλαμβάνουν ὅλα τά ἐσωτερικά ψηφία ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχουν πλῆθος ν−2 .

•3 'Επειδή κάθε τιμή ἀπό τίς 10 δυνατές τιμές πού μπορεῖ νά πάρει ἕνα ἐσωτερικό ψηφίο, εἶναι δυνατόν ν' ἀντιστοιχίσει σέ κάθε τιμή ἀπό τίς 10 κάθε ἄλλου ἐσωτερικοῦ ψ, τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων πού μπορεῖ νά ἐμφανίσει ὁ δοθείς ν-ψήφιος ἀκέραιος ἀνέρχεται σέ $10^{\nu-2}$.

•4 Καί ἀκόμη, ἐάν ὁ δοθείς ἀκέραιος εἶναι ὄρθιος (§2), θά πρέπει :

$$\psi_1 > \psi_\nu$$

Τότε τό $\psi_1$ μπορεῖ νά παίρνει τιμές ἀπό 1 ἕως 9 (9 τιμές) ἐνῶ τό $\psi_\nu$ ἀπό 0 ἕως 8 (9 τιμές). Ἔτσι σέ κάθε τιμή τοῦ $\psi_1$ πρέπει ν' ἀντιστοιχῆ μιά μικρότερη τιμή τοῦ $\psi_\nu$ , σύμφωνα μέ τήν ἑξῆς ἐποπτική παράσταση :

| | $\psi_1$ | $\psi_2$ | ……… | ……… | $\psi_{\nu-1}$ | $\psi_\nu$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | |
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 0,1,2,3,4,5,6,7,8 | |
| | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 0,1,2,3,4,5,6,7 | |
| | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0,1,2,3,4,5,6 | |
| | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0,1,2,3,4,5 | |
| | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 0,1,2,3,4 | $\psi_1 > \psi_\nu$ |
| | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0,1,2,3 | |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0,1,2 | |
| σύνολο | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,1 | |
| τιμῶν | – | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| ἕως → | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 45 | |

•5 'Από τήν παράσταση αὐτή προκύπτει ὅτι μέ τόν συνδυασμό τῆς κάθε μιᾶς ἀπό τίς 9 τιμές τοῦ $\psi_1$ μέ κάθε μιά μικρότερη της ἀπό τίς 45 τιμές τοῦ $\psi_\nu$ καί ἀκόμη, μέ τόν συνδυασμό της ἀλλεπαλλήλως μέ κάθε μία ἀπό τίς $10^{\nu-2}$ τιμές (§3 •3) τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων $\psi_2$ , $\psi_3$ , ……… , $\psi_{\nu-1}$ , παρέχεται συνολικό πλῆθος ὀρθίων ν-ψηφίων ἀκεραίων ἴσο μέ :

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45) \times 10^{\nu-2} = 5 \times 9 \times 10^{\nu-2}$$

•6 Συνεπῶς, ὁ λόγος τοῦ πλήθους τῶν ὀρθίων πρός τό συνολικό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι:

$$\frac{5\times9\times10^{\nu-2}}{9\times10^{\nu-1}} = \frac{50}{100}$$

§4 Ἰ σ ο σ κ ε λ ή ς ἄς κληθῆ ὁ ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τό πρῶτο ψηφίο εἶναι ἴσο μέ τό τελευταῖο ψηφίο του (π.χ. 101 , 7037).

§5 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ἰσοσκελῶν ἀκεραίων εἶναι τό 1/10 τοῦ ὅλου πλήθους τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων (π.χ. οἱ 3-ψήφιοι εἶναι $9 \times 10^{3-2} = 90$ μεταξύ τοῦ ὅλου πλήθους τῶν 900 3-ψηφίων, οἱ 7-ψήφιοι ἰσοσκελεῖς εἶναι $9 \times 10^{7-2} = 900000$ μεταξύ τῶν 9000000 7-ψηφίων). Διότι :

•1 Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἀπόδειξη (§3 •1) τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων (§3 •3) πού μπορεῖ νά ἐμφανίσει ἀλλεπάλληλα ἕνας διδόμενος ν-ψήφιος μέ τή μορφή $\psi_1 \psi_2 \cdots\cdots\cdots \psi_{\nu-1} \psi_\nu$ ἡ ὁποία μορφή, ὡς ἐλέχθη (§3 •1) δέν ἐκφράζει συγκεκριμένη ἀριθμητική τιμή, ἀνέρχεται σέ $10^{\nu-2}$.

•2 Ἄν ὁ δοθείς ἀκέραιος θεωρηθῆ ἰσοσκελής, πρέπει $\psi_1 = \psi_\nu$, ὅπου τό $\psi_1$ καί τό $\psi_\nu$ πρέπει νά παίρνουν συγχρόνως τήν ἴδια τιμή ἀπό 1 ἕως 9.

•3 Τότε, τό πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν τιμῶν πού μπορεῖ νά πάρει τό $\psi_1$ καί συγχρόνως τό $\psi_\nu$ σέ συνδυασμό πρός ἄλληλα, δέν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δηλ. ὁ ἀριθμός 45, ὅπως συμβαίνει στούς ὀρθίους ἀκεραίους (§3 •5), ἀλλ'εἶναι τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν (ἀπό τῆς μονάδος), δηλ. ὁ ἀριθμός 9 .

•4 Συνεπῶς τό πλῆθος ὅλων τῶν ἰσοσκελῶν ἀκεραίων εἶναι $9 \times 10^{\nu-2}$.

•5 Ὁ λόγος τοῦ συνολικοῦ πλήθους τῶν ἰσοσκελῶν ὡς πρός τό συνολικό πλῆθος $9 \times 10^{\nu-1}$ τῶν ν-ψηφίων, εἶναι :

$$\frac{9 \times 10^{\nu-2}}{9 \times 10^{\nu-1}} = \frac{10}{100}$$

§6 Ὑ π ο τ ε λ ή ς ἄς κληθῆ ὁ ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τό πρῶτο ψηφίο εἶναι μικρότερο ἀπό τό τελευταῖο του ψηφίο (π.χ. 103 , 2918).

§7 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ὑποτελῶν ἀκεραίων εἶναι τά $\frac{40}{100}$ τοῦ ὅλου πλήθους τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων (π.χ. οἱ 3-ψήφιοι ὑποτελεῖς εἶναι : $\frac{4}{10} \times 9 \times 10^{3-1} = 36 \times 10^{3-2} = 360$ μεταξύ τοῦ ὅλου πλήθους τῶν 900 3-ψηφίων, τῶν 7-ψηφίων ὑποτελῶν εἶναι $36 \times 10^{7-2} = 3600000$ μεταξύ

τῶν 9000000 7-ψηφίων κ.ο.κ.). Διότι :

•1 Τό πλῆθος τῶν ὑποτελῶν εἴτε μπορεῖ νά προκύψει ὡς διαφορά μεταξύ τοῦ πλήθους $9\times10^{\nu-1}$ τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων καί τοῦ πλήθους τῶν ὀρθίων καί τῶν ἰσοσκελῶν μαζύ (§2 καί §4), εἴτε νά προκύψει μέ ὅμοιες σκέψεις πρός τίς προηγούμενες. Δηλ. :

•2 Τό ψηφίο $\psi_1$ παίρνει τιμές ἤ 1 ἤ 2 ἤ ............ ἤ 8, ἐνῶ ἀντιστοίχως τό $\psi_\nu$ ἀπό 2 ἕως 9. Ἔτσι σέ κάθε μονοψήφια τιμή τοῦ $\psi_1$ πρέπει ν'ἀντιστοιχῆ μιά μεγαλύτερη τιμή τοῦ $\psi_\nu$ , σύμφωνα μέ τήν ἑξῆς παράσταση :

| $\psi_1$ | $\psi_2$ | ......... | $\psi_{\nu-1}$ | $\psi_\nu$ |
|---|---|---|---|---|
| | 9 | | 9 | 9 |
| 8 | 8 | | 8 | 8,9 |
| 7 | 7 | | 7 | 7,8,9 |
| 6 | 6 | | 6 | 6,7,8,9 |
| 5 | 5 | | 5 | 5,6,7,8,9 |
| 4 | 4 | | 4 | 4,5,6,7,8,9 |
| 3 | 3 | | 3 | 3,4,5,6,7,8,9 |
| 2 | 2 | | 2 | 2,3,4,5,6,7,8,9 |
| 1 | 1 | | 1 | |
| | 0 | | 0 | |

$(\psi_1 < \psi_\nu)$

•3 Συνεπῶς τό ἄθροισμα ὅλων τῶν δυνατῶν τιμῶν ἀπό 1 ἕως 8 πού μπορεῖ νά πάρει τό $\psi_1$ εἶναι

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

καί τό πλῆθος ὅλων τῶν τιμῶν τίς ὁποῖες μποροῦν νά πάρουν ὅλα τά ψηφία ψ, δηλ. τό πλῆθος ὅλων τῶν ὑποτελῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων εἶναι

$$36 \times 10^{\nu-2} = 4 \times 9 \times 10^{\nu-2}$$

•4 Ὁ λόγος τοῦ πλήθους τῶν ὑποτελῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων ὡς πρός τό συνολικό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ἀκεραίων εἶναι συνεπῶς

$$\frac{4 \times 9 \times 10^{\nu-2}}{9 \times 10^{\nu-1}} = \frac{4}{10^1} \times \frac{10^{\nu-2}}{10^{\nu-2}} = \frac{40}{100}$$

§8 Ἀ ρ τ ι ο ψ ή φ ι ο ς ἄς κληθῆ ὁ ἀκέραιος πού ἔχει πλῆθος ψηφίων ἄρτιο (π.χ. καθένας ἀπό τούς ἀκεραίους 74 , 1000 , 584630 ).

§9 Π ε ρ ι τ τ ο ψ ή φ ι ο ς ἄς κληθῆ ὁ ἀκέραιος πού ἔχει πλῆθος ψηφίων περιττό (π.χ. καθένας ἀπό τούς ἀκεραίους 201 , 13175 , 487 ).

§10 Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ά ψ η φ ί α ἑνός ν-ψηφίου ἀκεραίου ἄς κληθοῦν ἐκεῖνα πού περιέχονται μεταξύ τῶν ἀκραίων ψηφίων του (π.χ. τοῦ 35276 εἶναι τά 5, 2, 7). Τό πλῆθος τους, ὡς ἐλέχθη (§3 •2), εἶναι ν-2 .

§11 Κ ε ν τ ρ ι κ ό ψ η φ ί ο ἑνός περιττοψηφίου ἀκεραίου ἄς κληθῆ τό μεσαῖο ψηφίο του (π.χ. τοῦ 35276 εἶναι τό 2, τοῦ 1573859 τό 3).

•1 Οἱ ἀρτιοψήφιοι δέν ἔχουν κεντρικό ψηφίο.

§12 Κ ε ν τ ρ ι κ ό σ η μ ε ῖ ο ἤ ἁπλῶς κ έ ν τ ρ ο ἑνός ἀτιοψηφίου ἀκεραίου ἄς κληθῆ κάποιο σημεῖο πού κεῖται μεταξύ τῶν δύο ἐσωτερικῶν κεντρικῶν ψηφίων του (π.χ. στόν 723416 κεῖται μεταξύ τῶν ψηφίων 3 καί 4).

§13 Κ ε ν τ ρ ι κ ό ς ἄ ξ ω ν ἑνός οἱουδήποτε ν-ψηφίου ἄς κληθῆ ἡ νοητή εὐθεῖα ἡ ὁποία κεῖται στό ἐπίπεδο γραφῆς τοῦ ἀριθμοῦ καί διέρχεται διά τοῦ κεντρικοῦ ψηφίου (§11) ἤ διά τοῦ κέντρου (§12) τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (ἄν ν περιττός ἤ ἄρτιος, ἀντιστοίχως) καί τόν χωρίζει σέ δύο ἰδεατά μέρη, τό ἀ ρ ι σ τ ε ρ ό καί τό δ ε ξ ι ό, πού ὅπως εἶναι αὐτονόητο ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ψηφίων ($\frac{\nu}{2}$ γιά ἀρτιοψήφιο ἀκέραιο, $\frac{\nu-1}{2}$ γιά περιττοψήφιο).

§14 Ἀ ρ ι σ τ ε ρ ά ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ά ψηφία ἑνός ν-ψηφίου ἀκεραίου ἄς κληθοῦν :
Γιά μέν περιττοψήφιο (§9) τά ἐσωτερικά του ψηφία τά ὁποῖα περιέχονται μεταξύ τοῦ πρώτου καί τοῦ κεντρικοῦ (§11) ψηφίου (π.χ. στόν 9782356 εἶναι τά 7 καί 8), γιά δέ ἀρτιοψήφιο (§8), τά περιεχόμενα μεταξύ τοῦ πρώτου ψηφίου του καί τοῦ κέντρου του (§12) (π.χ. στόν 936428 τά 3 καί 6).

§15 Δ ε ξ ι ά ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ά ψηφία ἑνός ἀκεραίου ἄς κληθοῦν ἀνάλογα μέ τόν προηγούμενο (§14) ὁρισμό : γιά μέν ἕνα περιττοψήφιο τά ἐσωτερικά πού περιέχονται μεταξύ τοῦ κεντρικοῦ του καί τοῦ τελευταίου ψηφίου του (π.χ. στόν 9782356 εἶναι τά 3 καί 5), γιά δέ ἀρτιοψήφιο τά μεταξύ τοῦ κέντρου του καί τοῦ τελευταίου ψηφίου του (π.χ. στόν 936428 τά 4 καί 2).

§16 Εἶναι αὐτονόητο πώς σέ κάθε περίπτωση τῶν §14 καί §15, τά ἀριστερά ἐσωτερικά εἶναι ἰσοπληθῆ μέ τά δεξιά ἐσωτερικά τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου.

§17 Εὔκολα μπορεῖ νά παρατηρηθῆ ἐξ ὁρισμοῦ (§8 καί §9) πώς ἕνας ἀρτιοψήφιος ἀκέραιος μέ ν ψηφία καί ἕνας περιττοψήφιος μέ ν+1 ψηφία, ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος η τῶν ἀριστερῶν (ἄρα καί τῶν δεξιῶν) ἐσωτερικῶν ψηφίων τους (π.χ. ὁ ἑξαψήφιος 578032 καί ὁ ἑπταψήφιος 3147042 ἔχουν ἀνά δύο ἀριστερά καί ἀνά δύο δεξιά ἐσωτερικά ψηφία).

§18 Τό πλῆθος n κάθε ὁμάδας τῶν ὡς ἄνω ἐσωτερικῶν ψηφίων (§17 & 18) εἶναι, γιά μέν ν-ψήφιο ἀκέραιο μέ ν περιττό :

•1 $n = \frac{\nu-3}{2}$ (καί ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν δεξιῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων).
π.χ. ὁ ἀριθμός 86397 (ν=5) ἔχει ἀνά ἕνα ἐσωτερικό ψηφίο, ἀριστερά (τό 6) καί δεξιά (τό 9) , γιά δέ ν-ψήφιο μέ ν ἄρτιο :

•2 $n = \frac{\nu-2}{2}$ (καί ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν δεξιῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων).
π.χ. ὁ ἀκέραιος 532974 (ν=6) ἔχει ἀνά δύο ἐσωτερικά ψηφία, ἀριστερά (τά 3 καί 2) καί δεξιά (τά 9 καί 7) .

## ΚΕΦ. 2 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΕΝΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ

§19 Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ά (κατά θέσιν) ἄς κληθοῦν δύο ψηφία ἑνός ν-ψηφίου ἀκεραίου (ν > 3) ἅτινα κεῖνται ἑκατέρωθεν καί σέ ἴσες ἀποστάσεις (ψηφιακές) ἀπό τό κεντρικό ψηφίο (§11) (ἄν ὁ ἀκέραιος εἶναι περιττοφήφιος) ἤ ἀπό τό κέντρο (§12) (ἄν ὁ ἀκέραιος εἶναι ἀρτιοψήφιος).

•1 Ὡς παράδειγμα δίδονται δύο ἀριθμοί, κατά προτίμησιν ὄρθιοι (§3) :

| 11-ψήφιος | 6-ψήφιος |
|---|---|
| 72416531073 | 638024 |

•2 Τά πρῶτα ψηφία (τό 7 τοῦ ἑνός καί τό 6 τοῦ ἄλλου) εἶναι "κατά θέσιν" συμμετρικά τῶν τελευταίων ψηφίων τους (3 τοῦ ἑνός καί 4 τοῦ ἄλλου) τά δεύτερα ψηφία συμμετρικά τῶν προτελευταίων κ.ο.κ.

•3 Τό κεντρικό ψηφίο 5 (§11) εἶναι συμμετρικό πρός ἑαυτό.

§20 Ὑπάρχουν τρεῖς δυνατές περιπτώσεις ἀμοιβαίας συγκρίσεως τιμῆς δύο μονοψηφίων (θετικῶν) ἀκεραίων a καί b: μπορεῖ νά εἶναι ἴσοι, εἴτε ὁ ἕνας νά εἶναι μεγαλύτερος ἤ μικρότερος τοῦ ἄλλου. Δηλ. μπορεῖ νά εἶναι :

$$a = b \qquad a > b \qquad a < b$$

Τό πρῶτο σύμβολο εἶναι τῆς ἰσότητος, τά δέ δύο ἄλλα μπορεῖ νά κληθοῦν ἀπό κοινοῦ σ ύ μ β ο λ α ὑ π ε ρ ο χ ῆ ς ( > , < ).

§21 Συνεπῶς, κάθε ἀριστερό ἐσωτερικό ψηφίο ἑνός ἀκεραίου (μεγαλυτέρου ἀπό τριψήφιο) μπορεῖ νά εἶναι ἴσο ἤ μεγαλύτερο ἤ μικρότερο τοῦ συμμετρικοῦ του (§19).

§22 Στούς δύο πολυψηφίους ἀκεραίους τῆς §19 •1, τά τρία γνωστά σύμβολα

= (τῆς ἰσότητος), > (τοῦ μεγαλυτέρου ἀπό) καί < (τοῦ μικροτέρου ἀπό), μπορεῖ νά τοποθετηθοῦν ἐνδεικτικά πάνω ἀπό τά ἐσωτερικά ψηφία τοῦ καθενός καί νά δόσουν ἔτσι μιά εἰκόνα πού θά χρειασθῆ στά ἐπόμενα. Δηλαδή :

< > = >=|=< = < >
7 2 4 1 6 5 3 1 0 7 3
$\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ \phi_4\ \phi_5\ \phi_6\ \phi_7\ \phi_8\ \phi_9\ \phi_{10}\ \phi_{11}$
$(\phi_1 > \phi_{11})$

> >|< <
6 3 8 0 2 4
$\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ \phi_4\ \phi_5\ \phi_6$
$(\phi_1 > \phi_6)$

§23 Ἐφόσον ὁ ἕνας ἐκ τῶν διδομένων ὡς ἄνω ἀριθμῶν (ὀρθίων) ἔτυχε νά εἶναι περιττοψήφιος, τό κεντρικό του ψηφίο 5 εἶναι συμμετρικό πρός ἑαυτό (§11 καί §19 ·3).Συνεπῶς τά δύο σύμβολα ἰσότητος (=|=) πού εἶναι νοητά ἑκατέρωθεν τοῦ ψηφίου τούτου ἔχουν ὑπόσταση αὐτονόητη καί μπορεῖ νά παραλείπονται.

·1 Ἀπό τήν μέχρι τοῦδε ἀνάπτυξη μπορεῖ ἐπίσης νά παραλείπονται, ὁριστικῶς ἀπό δῶ καί πέρα, οἱ ἐνδεικτικές τροχιές ὡς αὐτονόητες.

·2 Μπορεῖ ἀκόμη νά παραλειφθοῦν (προσωρινῶς) καί τά σύμβολα (=, >, <) πού εἶχαν τοποθετηθῆ πάνω ἀπό τά δεξιά ἐσωτερικά ψηφία τῶν ἀριθμῶν.

·3 Ἔτσι, ὁ κάθε ἀριθμός παρέχει τήν ἑξῆς εἰκόνα πού εἶναι ἀρκετή γιά τόν σκοπό τῆς ἔρευνας :

< > = >|
7 2 4 1 6 5 3 1 0 7 3
n
$(\nu = 11,\ n = \frac{\nu-3}{2} = 4)$

> >|
6 3 8 0 2 4
n
$(\nu = 6,\ n = \frac{\nu-2}{2} = 2)$

## ΚΕΦ. 3 Ο Ι Ψ Η Φ Ι Α Κ Ο Ι Σ Υ Ν Δ Υ Α Σ Μ Ο Ι

§24 Σύμφωνα μέ τήν §21 καί ὅπως φαίνεται ἀπό τήν ἀμέσως παραπάνω εἰκόνα μπορεῖ, σέ τυχόντα ν-ψήφιο ἀκέραιο ($\nu > 3$) κάθε ἀριστερό ἐσωτερικό ψηφίο του νά εἶναι ἴσο ἤ μεγαλύτερο ἤ μικρότερο τοῦ συμμετρικοῦ του.

§25 Μέ τή βοήθεια συμβόλων συγκρίσεως = , > , <, ἡ ἐντύπωση τήν ὁποίαν δίδει ἡ ψηφιακή αὐτή σύγκριση διατηρεῖται κι'ἔτσι διευκολύνει τήν ἐφεξῆς ἔρευνα.

§26 Κάθε ν-ψήφιος ἀκέραιος ($\nu > 3$) ἀνταποκρίνεται σ'ἕνα καί μόνο συνδυασμό, ἤ ὀρθότερα δ ι ά τ α ξ η συμβόλων ἀπό τό πλῆθος τῶν $3^n$ διατάξεων πού εἶναι δυνατές πάνω στίς n ἀριστερές ἐσωτερικές ψηφιακές θέσεις, ἐνῶ σέ ἕνα ἐκ τῶν προτέρων διδόμενο συνδυασμό ἀντιστοιχοῦν πολλοί ν-ψήφιοι ἀριθμοί, ὅπως ἀποδεικνύεται παρακάτω.

§27 Δοθέντος ἑνός ν-ψηφίου ἀκεραίου (θετικοῦ) ($\nu > 1$) μέ τή μορφή

$$\psi_1 \psi_2 \psi_3 \;\cdots\cdots\cdots\;\; \psi_{\nu-2} \psi_{\nu-1} \psi_\nu$$

(μορφή πού δέν ἐκφράζει ἀριθμητική τιμή) προκύπτει ἀνάγκη νά δοθοῦν ἀπαντήσεις στά ἑξῆς δύο ἐρωτήματα :

•1 Κατά πόσους τρόπους μποροῦν νά διαταχθοῦν "μετ' ἐπαναλήψεως" σύμβολα συγκρίσεως (=, >, <) στίς n θέσεις τῶν ἐσωτερικῶν ἀριστερῶν ψηφίων $\psi_2$, $\psi_3$, ………… τῆς διδομένης ψηφιακῆς μορφῆς.

•2 Πόσοι ἀπό τούς $9 \times 10^{\nu-1}$ ν-ψηφίους ἀκεραίους ἀντιστοιχοῦν χωριστά σέ κάθε συνδυασμό συμβόλων, ὅταν κάθε γράμμα ψ ἀντικαθίσταται ἀλληλοδιαδόχως -σ' αὐτόν τόν συνδυασμό- μέ ἀριθμητικές τιμές ἀπό 0 ἕως 9.

§28 'Η ἀπάντηση στό πρῶτο ἐρώτημα εἶναι :

Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν ἤ ἀκριβέστερα, τῶν διατάξεων "μετ' ἐπαναλήψεως", τριῶν συμβόλων (=, >, <) γιά n θέσεις ἐσωτερικῶν ἀριστερῶν ψηφίων (§14 καί §23 •3), δίδεται ἀπό τόν γνωστό τύπο

$$_{R}A^{n}_{m=3} = m^n = 3^n$$

•1 Παραδείγματα : Γιά ἕνα 4-ψήφιο, ἕνα 5-ψήφιο, ἕνα 6-ψήφιο καί ἕνα 7-ψήφιο ἀκέραιο, σημειώνονται οἱ δυνατές "διατάξεις μετ' ἐπαναλήψεως" τριῶν συμβόλων =, >, <, πάνω ἀπό τίς n ἀριστερές ἐσωτερικές ψηφιακές θέσεις τῶν ἀριθμῶν τούτων :

| | $\psi_1$ | $\overbrace{\psi_2}^{n}$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | = | | |
| 2 | | > | | |
| 3 | | < | | |

$\nu = 4$ ψηφία $\quad n = \frac{\nu-2}{2} = 1$

$m^n = 3^1 = 3$ διατάξεις

---

| | $\psi_1$ | $\overbrace{\psi_2}^{n}$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | = | | | | |
| 2 | | > | | | | |
| 3 | | < | | | | |

$\nu = 5$ ψηφία $\quad n = \frac{\nu-3}{2} = 1$

$m^n = 3^1 = 3$ διατάξεις

---

| | $\psi_1$ | $\overbrace{\psi_2\ \psi_3}^{n}$ | | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | = | = | | | |
| 2 | | = | > | | | |
| 3 | | = | < | | | |
| 4 | | > | = | | | |
| 5 | | < | = | | | |
| 6 | | > | > | | | |
| 7 | | < | < | | | |
| 8 | | > | < | | | |
| 9 | | < | > | | | |

$\nu = 6$ ψηφία $\quad n = \frac{\nu-2}{2} = 2$

$m^n = 3^2 = 9$ διατάξεις

| | $\psi_1$ | $\overbrace{\psi_2\ \psi_3}^{n}$ | | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ | $\psi_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | = | = | | | | |
| 2 | | = | > | | | | |
| 3 | | = | < | | | | |
| 4 | | > | = | | | | |
| 5 | | < | = | | | | |
| 6 | | > | > | | | | |
| 7 | | < | < | | | | |
| 8 | | > | < | | | | |
| 9 | | < | > | | | | |

$\nu = 7$ ψηφία $\quad n = \frac{\nu-3}{2} = 2$

$m^n = 3^2 = 9$ διατάξεις

§29 'Η ἀπάντηση στό δεύτερο ἐρώτημα (§27·2) δίδεται ἀπό τό ἑξῆς θεώρημα τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξη ἀναπτύσσεται στήν §32 :

**Θ ε ώ ρ η μ α .** 'Από τό σύνολο $9\times10^{\nu-1}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τό ὑποσύνολο ἐκείνων οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται σέ μία (ἀπό τίς $3^n$) διδόμενη διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (=,>,<) μεταξύ τῶν $n$ ἐσωτερικῶν ἀριστερῶν ψηφίων ν-ψηφίου τινος ἀκεραίου παρέχεται ἀπό τούς τύπους :

[1]

$$\mu = 10^p \times 45^{n-p} \times 9^a \times 36^b \times 45^c \quad (\nu \text{ ἄρτιος})$$

$$\mu = 10^{p+1} \times 45^{n-p} \times 9^a \times 36^b \times 45^c \quad (\nu+1 \text{ περιττός}) \text{ ἔνθα :}$$

$p$ = τό πλῆθος τῶν συμβόλων ἰσότητος (=) τά ὁποῖα ἐνδέχεται νά ὑπάρχουν στήν περιοχή τῶν $n$ ψηφίων.

$a = 1$ μέ $b = c = 0$ γιά ἰσοσκελεῖς ἀκεραίους (§ 4)

$b = 1$ μέ $a = c = 0$ γιά ὑποτελεῖς ἀκεραίους (§ 6)

$c = 1$ μέ $a = b = 0$ γιά ὀρθίους ἀκεραίους (§ 2)

§30 **Π ό ρ ι σ μ α .** Τό ὑποσύνολο μ′ τῶν ἀκεραίων περιττοψηφίων ἀριθμῶν (ν περιττός) πού ἀνταποκρίνονται σέ ὁρισμένη διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (= , > , <) εἶναι δεκαπλάσιο τοῦ πλήθους μ τῶν ἀρτιοψηφίων πού ἔχουν ν-1 ἄρτιο, ὑπό τήν ἴδια διάταξη (ἀπόδειξη στήν §33).

§31 Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

•1 Δίδεται ὁ 10-ψήφιος ὄ ρ θ ι ο ς ἀκέραιος

$\overset{>}{7}\ \underbrace{\underset{<}{6}\ \underset{=}{3}\ \underset{>}{4}\ \underset{=}{5}}_{n}\ 5\ 2\ 3\ 9\ 1$  $\nu = 10$  $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$  Διά τοῦ τύπου μ νά εὑρεθῆ πόσοι παρόμοιοι ἀριθμοί μέ αὐτή τή διάταξη συμβόλων συγκρίσεως ἐνυπάρχουν ἐντός τοῦ γενικοῦ πλήθους τῶν 10-ψηφίων. Τύπος μ τῆς §29.

$p = 2$  $n-p = 2$  $a = b = 0$  $c = 1$  $\mu = 10^2 \times 45^3 = 9112500$

εἶναι τό πλῆθος τῶν ὀρθίων 10-ψηφίων ἀκεραίων τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων, μέσα στό συνολικό πλῆθος τῶν $9 \times 10^{\nu-1=9}$ 10-ψηφίων ἀκεραίων.

•2 Δίδεται ὁ 10-ψήφιος ὑ π ο τ ε λ ή ς ἀκέραιος

$\overset{<}{1}\ \underbrace{\underset{<}{6}\ \underset{=}{3}\ \underset{>}{4}\ \underset{=}{5}}_{n}\ |\ 5\ 2\ 3\ 9\ 7$  $\nu = 10$  $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$  Διά τοῦ τύπου μ νά εὑρεθῆ πόσοι παρόμοιοι ἀριθμοί μέ αὐτή τή διάταξη συμβόλων συγκρίσεως ὑπάρχουν μέσα

εἰς τό γενικό πλῆθος τῶν 10-ψηφίων. Τύπος μ τῆς §29.

$p = 2$  $n-p = 2$  $a = c = 0$  $b = 1$  $\mu = 10^2 \times 45^2 \times 36^1 = 7290000$,

εἶναι τό πλῆθος τῶν ὑποτελῶν 10-ψηφίων ἀκεραίων τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων, μέσα στό συνολικό πλῆθος τῶν $9 \times 10^{\nu-1=9}$ 10-ψηφίων ἀκεραίων.

•3 Δίδεται ὁ 10-ψήφιος ἰ σ ο σ κ ε λ ή ς ἀκέραιος

$\overset{=}{3}\ \underbrace{\underset{<}{6}\ \underset{=}{3}\ \underset{>}{4}\ \underset{=}{5}}_{n}\ |\ 5\ 2\ 3\ 9\ 3$  $\nu = 10$  $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$  Διά τοῦ τύπου μ νά εὑρεθῆ, ὡς προηγουμένως, τό πλῆθος τῶν ἀριθμῶν τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων.

$p = 2$  $n-p = 2$  $b = c = 0$  $a = 1$  $\mu = 10^2 \times 45^2 \times 9^1 = 1822500$

εἶναι τό πλῆθος τῶν ἰσοσκελῶν 10-ψηφίων ἀκεραίων τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων, μέσα στό γενικό πλῆθος τῶν $9 \times 10^9$ 10-ψηφίων ἀκεραίων.

•4 Δίδεται ὁ 11-ψήφιος ὄ ρ θ ι ο ς ἀκέραιος

$\overset{>}{7}\ \underbrace{\underset{<}{6}\ \underset{=}{3}\ \underset{>}{4}\ \underset{=}{5}}_{n}\ |\ 0\ |\ 5\ 2\ 3\ 9\ 1$  $\nu = 11$  $n = \frac{\nu-3}{2} = 4$  Διά τοῦ τύπου μ′ νά εὑρεθῆ πόσοι παρόμοιοι ἀριθμοί μέ αὐτή

τή διάταξη τῶν συμβόλων συγκρίσεως ὑπάρχουν μέσα στό γενικό πλῆθος τῶν ἑνδεκαψηφίων ἀκεραίων. Τύπος τῆς §29 γιά τόν μ'.

p = 2 n−p = 2 a = b = 0 c = 1 $\mu' = 10^3 \times 45^2 \times 45^1 = 91125000$

εἶναι τό πλῆθος τῶν ὀρθίων 11-ψηφίων τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων μέσα στό συνολικό πλῆθος τῶν $9 \times 10^{11-1=10}$ 11-ψηφίων ἀκεραίων, δηλ. δεκαπλάσιο τοῦ προηγουμένου πλήθους τῶν ὀρθίων 10-ψηφίων.

•5 Δίδεται ὁ 11-ψήφιος ὑ π ο τ ε λ ή ς ἀκέραιος

$$\overset{<}{1}\;\underbrace{\underset{<}{6}\;\underset{=}{3}\;\underset{>}{4}\;\underset{=}{5}}_{n}\;\big|\;0\;5\;2\;3\;9\;7$$

$\nu = 11$ $n = \frac{\nu-3}{2} = 4$ Διά τοῦ τύπου μ' νά εὑρεθῇ πόσοι παρόμοιοι ἀριθμοί ἀνταποκρίνονται σ' αὐτή τή διάταξη συμβόλων.

p = 2 n−p = 2 a = c = 0 b = 1 $\mu' = 10^3 \times 45^2 \times 36^1 = 72900000$

εἶναι τό πλῆθος τῶν ὑποτελῶν 11-ψηφίων ἀκεραίων τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων, μέσα στό συνολικό πλῆθος τῶν $9 \times 10^{10}$ 11-ψηφίων, δηλ. 10-πλάσιο τοῦ προηγουμένου πλήθους τῶν 10-ψηφίων ὑποτελῶν.

•6 Δίδεται ὁ 11-ψήφιος ἰ σ ο σ κ ε λ ή ς ἀκέραιος

$$\overset{=}{3}\;\underbrace{\underset{<}{6}\;\underset{=}{3}\;\underset{>}{4}\;\underset{=}{5}}_{n}\;\big|\;0\;5\;2\;3\;9\;3$$

$\nu = 11$ $n = \frac{\nu-3}{2} = 4$ Διά τοῦ τύπου μ' νά εὑρεθῇ πόσοι παρόμοιοι ἀριθμοί ἀντιστοιχοῦν σ'αὐτή τή διάταξη (τύπος μ' §29).

p = 2 n−p = 2 b = c = 0 a = 1 $\mu' = 10^3 \times 45^2 \times 9^1 = 18225000$

εἶναι τό πλῆθος τῶν ἰσοσκελῶν 11-ψηφίων τῆς διδομένης διατάξεως συμβόλων, μέσα στό συνολικό πλῆθος τῶν $9 \times 10^{10}$ 11-ψηφίων, δηλ. 10-πλάσιο τοῦ προγουμένου πλήθους τῶν 10-ψηφίων ἰσοσκελῶν.

§32 **Ἀ π ό δ ε ι ξ η** τοῦ θεωρήματος τῆς §29 .

•1 Ἔστω ἀρτιοψήφιος ὄρθιος ἀκέραιος μέ ν=10 ψηφία, ὑπό τήν μορφήν

$$\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\psi_5\psi_6\psi_7\psi_8\psi_9\psi_{10} \qquad (\psi_1 > \psi_{10})$$

(μορφή πού, ὅπως ἐλέχθη, δέν ἐκφράζει ἀριθμητική τιμή). Τό πλῆθος n τῶν ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν του ψηφίων εἶναι $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$ (§18 •2).

•2 Ἔστω ἀκόμη πώς αὐτά τά n ψηφία του ($\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$, $\psi_5$) διέπονται ἀπό τήν ἑξῆς τυχοῦσα διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (μετ' ἐπαναλήψεως) :

$$\overset{>}{\psi_1}\;\underbrace{\underset{=}{\psi_2}\;\underset{>}{\psi_3}\;\underset{=}{\psi_4}\;\underset{<}{\psi_5}}_{n}\;\big|\;\psi_6\;\psi_7\;\psi_8\;\psi_9\;\psi_{10}$$

Δηλ.

$\phi_1 > \phi_{10}$ , $\phi_2 = \phi_9$ $\phi_3 > \phi_8$ $\phi_4 = \phi_7$ , $\phi_5 < \phi_6$

| $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_5$ | $\phi_6$ | $\phi_7$ | $\phi_8$ | $\phi_9$ | $\phi_{10}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 9 | 9 | 9 | | 9 | 9 | | 9 | | |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 0,1,……,8 | 8 | 8 | 0,1,……,8 | 8 | 0,1,……,8 | |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 0,1,……,7 | 7 | 7 | 0,1,……,7 | 7 | 0,1,……,7 | |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 0,1,……,6 | 6 | 6 | 0,1,……,6 | 6 | 0,1,……,6 | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 0,1,……,5 | 5 | 5 | 0,1,……,5 | 5 | 0,1,……,5 | |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 0,1,2,3,4 | 4 | 4 | 0,1,2,3,4 | 4 | 0,1,2,3,4 | |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 0,1,2,3 | 3 | 3 | 0,1,2,3 | 3 | 0,1,2,3 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 0,1,2 | 2 | 2 | 0,1,2 | 2 | 0,1,2 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0,1 | 1 | 1 | 0,1 | 1 | 0,1 | σύνολο |
| | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | τιμών |
| 9 | 10 | 9 | 10 | 45 | 9 | 10 | 45 | 10 | 45 | ← έως |

•3 Κάθε μία ἀπό τίς 10 δυνατές τιμές (ἀπό 0 ἕως 9) καθενός ἀπό τά ἐσωτερικά ψηφία πού ἔτυχε νά εἶναι ἴσο πρός τό συμμετρικό του (δηλ. ἐδῶ τό $\phi_2$ καί τό $\phi_4$) μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ μιά ἴση πρός αὐτή τιμή τοῦ συμμετρικοῦ τούτου ψηφίου (ἐδῶ τοῦ $\phi_9$ καί τοῦ $\phi_7$ ἀντιστοίχως). Ἔτσι τό μέγιστο πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν γιά κάθε τέτοιο ζεῦγος ἴσων ψηφίων πρέπει ν' ἀνέρχεται σέ 10. Ἄρα γιά πλῆθος p ζευγῶν ἴσων ἐσωτερικῶν ψηφίων, τό πλῆθος τῶν συνολικῶν συνδυασμῶν γι' αὐτά εἶναι ἴσο μέ $10^p$.

•4 Ἐπίσης, γιά κάθε μία ἀπό τίς 9 δυνατές τιμές (ἀπό 1 ἕως 9) καθενός ἀπό τά ἐσωτερικά ψηφία πού ἔτυχε νά εἶναι μεγαλύτερο τοῦ συμμετρικοῦ του (ἐδῶ τοῦ $\phi_3$ καί τοῦ $\phi_6$) μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ κάθε μία ἀπό τίς μικρότερες της αὐτοῦ τοῦ συμμετρικοῦ ψηφίου (ἐδῶ τοῦ $\phi_8$ καί τοῦ $\phi_5$ ἀντιστοίχως). Ἔτσι τό μέγιστο πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν γιά κάθε τέτοιο ζεῦγος ἀνίσων ψηφίων, πρέπει ν' ἀνέρχεται σέ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Ἄρα γιά πλῆθος n-p ζευγῶν ἀνίσων ἐσωτερικῶν ψηφίων, τό πλῆθος τῶν συνολικῶν συνδυασμῶν γι' αὐτά εἶναι ἴσο μέ $45^{n-p}$

•5 Σέ ὄ ρ θ ι ο ἀκέραιο (§2), ὅπως στόν δοθέντα, στόν ὁποῖον

$$\phi_1 > \phi_{10}$$

προκύπτει μέ ὅμοιες σκέψεις, πώς κάθε μία ἀπό τίς 9 δυνατές τιμές (ἀπό 1 ἕως 9) τοῦ $\phi_1$ μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ κάθε μικρότερη της τιμή τοῦ $\phi_{10}$ (ἀπό 0 ἕως 8).

Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τιμῶν μεταξύ $\phi_1$ καί $\phi_{10}$ ἀνέρχεται σέ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

ὅπως ἐξηγήθηκε προηγουμένως.

Ἄρα γιά ὄρθιο ἀκέραιο παρουσιάζεται ἀκόμη -γιά τά $\phi_1$ καί $\phi_{10}$- ἕνας

παράγων $45^1$ ή, γενικότερα, $45^c$ ($c = 1$, όπως έξηγεῖται παρακάτω).

•6 Σέ ύ π ο τ ε λ ῆ ἀκέραιο (§6) στόν ὁποῖον εἶναι $\psi_1 < \psi_{10}$, προκύπτει μέ παρόμοιες σκέψεις, ὅτι κάθε μία ἀπό τίς 8 δυνατές τιμές (ἀπό 1 ἕως 8, §7 •2) τοῦ $\psi_1$ μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ κάθε μεγαλύτερη της τιμή τοῦ $\psi_{10}$. Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τούτων μεταξύ $\psi_1$ καί $\psi_{10}$ ἀνέρχεται σέ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Ἄρα γιά ὑποτελῆ ἀκέραιο παρουσιάζεται ἀκόμη, γιά τά $\psi_1$ καί $\psi_{10}$, ἕνας παράγων $36^1$ ή, γενικότερα, $36^b$ ($b = 1$, ὅπως ἀναπτύσσεται παρακάτω).

•7 Σέ ἰ σ ο σ κ ε λ ῆ ἀκέραιο (§4) στόν ὁποῖον εἶναι $\psi_1 = \psi_{10}$, προκύπτει ὁμοίως ὅτι κάθε μία ἀπό τίς 9 (καί ὄχι ἀπό τίς 10) δυνατές τιμές (ἀπό 1 ἕως 9 καί ὄχι ἀπό 0 ἕως 9) τοῦ $\psi_1$ (διότι δέν ἐκφωνεῖται ἀκέραιος ἀριθμός ἔχων πρῶτο ψηφίο τό 0) μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ μιά ἴση πρός αὐτήν τιμή τοῦ $\psi_{10}$.

Ἔτσι, τό μέγιστο πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν γιά τά $\psi_1$ καί $\psi_{10}$, ἀνέρχεται σέ 9.

Ἄρα γιά ἰσοσκελῆ ἀκέραιο παρουσιάζεται ἀκόμη γιά τά $\psi_1$ καί $\psi_{10}$, ἕνας παράγων $9^1$ ή, γενικότερα, $9^a$ ($a = 1$, ὅπως ἐξηγεῖται παρακάτω).

•8 Κατόπιν τῶν προηγουμένων, τό σύνολο τῶν συνδυασμῶν τῶν δυνατῶν τιμῶν (καθένας τῶν ὁποίων συνδυασμῶν δίδει καί ἀπό ἕνα ν-ψήφιο ἀκέραιο) μεταξύ τῶν $10^p$, $45^{n-p}$, $9^a$, $36^b$ καί $45^c$ ἐπί μέρους συνδυασμῶν, εἶναι

$$\mu = 10^p \times 45^{n-p} \times 9^a \times 36^b \times 45^c$$

δηλ. τό ἐξαγόμενο τοῦ τύπου τῆς §29 πού διέπει ἀρτιοψηφίους ἀκεραίους.

•9 Ἡ ἀνωτέρω μορφή τοῦ τύπου μ ἐκρίθη πώς εἶναι ἁπλούστερη ὅλων, ἐπειδή παρέχει γιά ὅλες τίς περιπτώσεις ἀκεραίων ἑνιαῖο τρόπο ὑπολογισμοῦ, παρά ἐάν ἐδίδετο μέ τίς ἑξῆς ἐπί μέρους μορφές :

Γιά ὀρθίους : $\mu_1 = 10^p \times 45^{n-p+1}$

Γιά ὑποτελεῖς : $\mu_2 = 10^p \times 45^{n-p} \times 36$

Γιά ἰσοσκελεῖς : $\mu_3 = 10^p \times 45^{n-p} \times 9$

Οἱ τρεῖς αὐτοί τύποι ἑνοποιοῦνται στόν τύπο μ μέ τήν κατάλληλη προσαρμογή τῶν ἐκθετῶν a, b, c, ἡ ὁποία ἐξηγεῖται στήν §29.

§33 'Α π ό δ ε ι ξ η τοῦ πορίσματος τῆς §30 .

•1 Ἔστω περιττοψήφιος ὄρθιος ἀκέραιος μέ ν =11 ψηφία ὑπό τήν μορφή :

$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5 \mid \psi_6 \mid \psi_7\ \psi_8\ \psi_9\ \psi_{10}\ \psi_{11}$ , ἔνθα $n = \frac{\nu-3}{2} = 4$ (§18 •1)

•2 Ἔστω ἀκόμη ὅτι αὐτά τά n ψηφία του ($\psi_2$ , $\psi_3$ , $\psi_4$ , $\psi_5$) διέπονται ἀπό τήν τυχοῦσα διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (διάταξη μετ' ἐπαναλήψεως), ὅμοια μέ τή διάταξη τοῦ ἀρτιοψηφίου τῆς §32 •2 , δηλ. :

$$\psi_1\ \overbrace{\psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5}^{n} \mid \psi_6 \mid \psi_7\ \psi_8\ \psi_9\ \psi_{10}\ \psi_{11}$$
$$> \quad = \ > \ = \ <$$

•3 Οἱ σκέψεις πού ὁδηγοῦν στήν ἀπόδειξη εἶναι ὅμοιες ἐφεξῆς μέ τίς σκέψεις οἱ ὁποῖες ἀνεπτύχθησαν στήν §32 γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. Στήν προκειμένη περίπτωση τοῦ περιττοψηφίου ἀκεραίου, τό μεσαῖο του ψηφίο $\psi_6$, πού μπορεῖ νά πάρει 10 τιμές (ἀπό 0 ἕως 9) καί εἶναι συμμετρικό πρός ἑαυτό (§19 •3), προσθέτει ἕνα παράγοντα $10^1$ στό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν. Δίδει ἄρα δεκαπλάσιο ἀποτέλεσμα μ' ἀπό ἐκεῖνο τοῦ τύπου μ γιά ἀρτιοψήφιο μέ ν = 10 ψηφία.

'Επομένως ὁ ἐκθέτης p τοῦ 10 στόν τύπο μ τῆς §29, πρέπει νά γίνει p + 1 στόν τύπο μ' τῆς §30.

## ΚΕΦ. 4 ΟΙ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

§34 'Ο τύπος $\mu = 10^p \times 45^{n-p} \times 9^a \times 36^b \times 45^c$ (§29) δίδει, ὡς ἐλέχθη, ἕνα ὑποσύνολο ν-ψηφίων (ν ἄρτιος) ἀκεραίων οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται σ' ἕνα διδόμενο συνδυασμό, ἤ ὀρθότερα, διάταξη συμβόλων ( = , > , <), ἀπό τό σύνολο τῶν $3^n$ δυνατῶν διατάξεων "μετ' ἐπαναλήψεως" καί τοῦ ὁποίου τύπου ὁ ἐκθέτης p ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν ζευγῶν τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων (§10), τά ὁποῖα ζεύγη περιέχουν ἀνά δύο συμμετρικά ἴσα πρός ἄλληλα ψηφία ἤ μέ ἄλλη διατύπωση, ὁ p ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν συμβόλων ἰσότητος ( = ) (§29) τά ὁποῖα ἐνδέχεται νά ὑπάρχουν μέσα στά n ἀριστερά ἐσωτερικά ψηφία μιᾶς διδομένης ψηφιακῆς διατάξεως $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \ldots\ldots \psi_{\nu-1}\ \psi_\nu$ (ν ἄρτιος) ἤ μέσα στά n ἀριστερά ἐσωτερικά ψηφία ἑνός συγκεκριμένου ν-ψηφίου ἀκεραίου (βλ. παραδείγματα §31 καί §43).

§35 Ἄρα ὁ ἐκθέτης n-p τοῦ ἀνωτέρω τύπου μ ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν ὑπολοίπων ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων ἀ σ χ έ τ ω ς ἐ ά ν σέ καθένα τους ἀντιστοιχεῖ εἴτε τό σύμβολο τοῦ "μεγαλυτέρου ἀπό" (>) εἴτε τοῦ "μικροτέρου ἀπό" (<) .

§36 Όπως όμως γίνεται φανερό από τά παραδείγματα τῶν §28·1, §31, §43, καθένας ἀπό τούς ἐκθέτες p καί n − p ἀποκτᾶ τήν πρέπουσα τιμή του μόνο ἀπό τό πλῆθος τῶν συμβόλων ( = , >, <) καί ὄ χ ι ἀπό τή θ έ σ η πού τό καθένα τους ἔχει μέσα στή διάταξη.

§37 Οἱ διατάξεις πού περιέχουν τό ἴδιο πλῆθος συμβόλων ἰσότητος (=) ἄς κληθοῦν ἰ σ ο δ ύ ν α μ ε ς , ἐπειδή κάθε μιά τους δίδει τήν ἴδια τιμή τοῦ ἐκθέτη p, παρέχει ἄρα καί τό ἴδιο ὑποσύνολο μ (§29).

§38 Γίνεται φανερό πώς τό σύνολο τῶν $3^n$ διατάξεων μπορεῖ εὔκολα νά καταγραφῆ σέ ὁ μ ά δ ε ς ἰ σ ο δ υ ν ά μ ω ν δ ι α τ ά ξ ε ω ν.

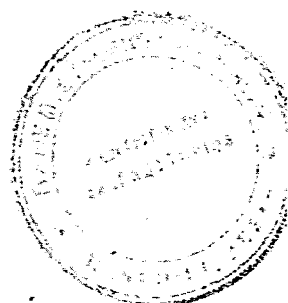
§39 Στό παράδειγμα 10-ψηφίου ἀκεραίου τῆς §42 ἔχουν καταγραφῆ ὅλες οἱ $3^n = 3^4 = 81$ διατάξεις συμβόλων κατά ὁμάδες ἰσοδυνάμων διατάξεων.

·1 Ἔτσι, στήν πρώτη ὁμάδα περιέχεται μία διάταξη μέ ἕνα σύμβολο ἰσότητος ($x_0 = 1$), στή δεύτερη ὁμάδα περιέχονται $x_1$ διατάξεις μέ $n-1 = 3$ σύμβολα ἰσότητος σέ κάθε μία, στήν τρίτη $x_2$ διατάξεις μέ $n-2 = 2$ σύμβολα σέ κάθε διάταξη κ.ο.κ., στήν δέ τελευταία ὁμάδα περιέχονται $x_{n=4}$ διατάξεις μέ $n - n = 0$ σύμβολα ἰσότητος σέ κάθε μιά διάταξη.

§40 Τόσο τό πλῆθος τῶν ὁμάδων ὅσο καί τό πλῆθος τῶν ἰσοδυνάμων διατάξεων κάθε ὁμάδας, προσδιορίζονται μέ βάση τό ἑξῆς θεώρημα :

§41 Θ ε ώ ρ η μ α . Τό πλῆθος τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων συμβόλων συγκρίσεως (=,>,<) οἱ ὁποῖες ὑφίστανται στήν περιοχή τῶν n ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων ν-ψηφίου τινος ἀκεραίου ($\nu > 3, n \geq 1$), ἰσοῦται μέ $n+1$, ὅσο εἶναι τό πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(1+2)^n$ . Τό πλῆθος τῶν ἰσοδυνάμων διατάξεων πού περιέχονται σέ κάθε ὁμάδα ἀκολουθεῖ τή σειρά καί τήν τιμή (ἀπό τῆς μονάδος) τῶν προσθετέων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ὡς ἄνω διωνύμου.

2

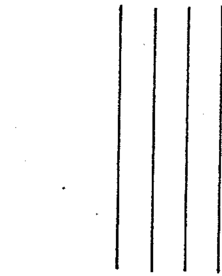


§42 Παράδειγμα : Ἔστω ἀκέραιος 10-ψήφιος ($\nu = 10$ $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$) :

·1 Τό σύνολο τῶν διατάξεων στήν περιοχή τῶν n ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφιακῶν θέσεων εἶναι

$$3^n = 3^4 = 81$$

οἱ ὁποῖες καταγράφονται κατά ὁμάδες ἰσοδυνάμων διατάξεων (§37) ὡς ἑξῆς:




$\nu = 10 \quad n = 4$

Ι.Δ. ≡ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ

$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5$ | $\psi_6\ \psi_7\ \psi_8\ \psi_9\ \psi_{10}$

**1η ΟΜΑΣ Ι.Δ.** — $X_0 = 1$, $p = n = 4$

| | |
|---|---|
| 1 | = = = = |

**2α ΟΜΑΣ Ι.Δ.** — $X_1 = ?$ (8), $p = n - 1 = 3$

| | |
|---|---|
| 2 | = = = > |
| 3 | = = > = |
| 4 | = > = = |
| 5 | > = = = |
| 6 | = = = < |
| 7 | = = < = |
| 8 | = < = = |
| 9 | < = = = |

**3η ΟΜΑΣ Ι.Δ.** — $X_2 = ?$ (24), $p = n - 2 = 2$

| | |
|---|---|
| 10 | = = > > |
| 11 | = > = > |
| 12 | > = = > |
| 13 | > > = = |
| 14 | = > > = |
| 15 | > = > = |
| 16 | > = = < |
| 17 | = > = < |
| 18 | = = > < |
| 19 | = = < > |
| 20 | = = < < |
| 21 | > = < = |
| 22 | = > < = |
| 23 | = < > = |
| 24 | = < = > |
| 25 | = < = < |
| 26 | = < < = |
| 27 | > < = = |
| 28 | < > = = |
| 29 | < = > = |
| 30 | < = = > |
| 31 | < = = < |
| 32 | < = < = |
| 33 | < < = = |

**4η ΟΜΑΣ Ι.Δ.** — $X_3 = ?$ (32), $p = n - 3 = 1$

| | |
|---|---|
| 34 | = > > > |
| 35 | > > > = |
| 36 | > = > > |
| 37 | > > = > |
| 38 | = < < < |
| 39 | < < < = |
| 40 | < = < < |
| 41 | < < = < |
| 42 | > > = < |
| 43 | = > > < |
| 44 | > = > < |
| 45 | > = < > |
| 46 | = > < > |
| 47 | > = < < |
| 48 | = > < < |
| 49 | > > < = |
| 50 | > < > = |
| 51 | = < > > |
| 52 | = < > < |
| 53 | = < < > |
| 54 | > < = > |
| 55 | > < = < |
| 56 | > < < = |
| 57 | < > > = |
| 58 | < > = > |
| 59 | < > = < |
| 60 | < > < = |
| 61 | < < > = |
| 62 | < = > > |
| 63 | < = > < |
| 64 | < = < > |
| 65 | < < = > |

**5η ΟΜΑΣ Ι.Δ.** — $X_{4=n} = (m = 2)^{n=4} = 16$, $p = n - n = 0$

| | |
|---|---|
| 66 | > > > > |
| 67 | < < < < |
| 68 | > > > < |
| 69 | > > < > |
| 70 | > > < < |
| 71 | > < > > |
| 72 | > < > < |
| 73 | > < < > |
| 74 | > < < < |
| 75 | < > > > |
| 76 | < > > < |
| 77 | < > < > |
| 78 | < > < < |
| 79 | < < > > |
| 80 | < < > < |
| 81 | < < < > |

§43 'Απόδειξη τοῦ θεωρήματος τῆς §41 :

•1 Σέ ν-ψήφιο ἀκέραιο ($\nu > 3$, $n \geq 1$) ἡ παρουσία τῶν συμβόλων ἰσότητος ( = ) βαίνει ἐλαττουμένη ἀπό πλῆθος n (στήν πρώτη ὁμάδα) μέχρι πλῆθος μηδέν (0) (στήν τελευταία). Τό ἴδιο συμβαίνει καί στόν p :

$$p \longrightarrow 0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots ,n$$

•2 Κάθε τιμή τοῦ p ἀντιστοιχεῖ καί σέ μιά ὁμάδα. 'Επειδή ὅμως οἱ τιμές αὐτές τοῦ p ἀπό 0 ἕως n ἔχουν πλῆθος n+1, ἔπεται ὅτι καί τό πλῆθος τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων συμβόλων τοῦ ἐξεταζομένου ν-ψηφίου εἶναι n+1 .

•3 'Αλλά ἡ δύναμις $3^n$ πού ἐκφράζει τό σύνολο τῶν διατάξεων συμβόλων μετ' ἐπαναλήψεως (§28), μπορεῖ ν' ἀναπτυχθῆ ὡς διώνυμο Νεύτωνος :

$$3^n = (1+2)^n = k_0 + k_1 + k_2 + k_{n-1} + k_n$$

στό ὁποῖον τό πλῆθος τῶν προσθετέων του εἶναι, κατά τά γνωστά, n+1 ὅσο δηλ. καί τό πλῆθος τῶν ὁμάδων.

•4 Οἱ τιμές x (§42 •1) οἱ ὁποῖες πρέπει νά προσδιορισθοῦν, ἔχουν καί αὐτές πλῆθος n+1. Θ' ἀποδειχθῆ πώς κάθε μιά τους ἀντιστοιχεῖ καί σέ μιά τιμή k τοῦ τύπου τῆς §43 •3 καί μάλιστα μέ τήν ἴδια τάξη.

•5 Σέ κάθε τιμή τοῦ ἐκθέτη p ἀντιστοιχεῖ καί μιά τιμή τοῦ ὑποσυνόλου μ (§29 & §34). Γιά τόν δοθέντα 10-ψήφιο (§42) πού ἄς ὑποτεθῆ ὄρθιος ($\phi_1 > \phi_{10}$), πρέπει νά εἶναι :

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_n x_n = 45 \times 10^{\nu-2} = 45 \times 10^{2n}$$

(§3 & §18 •2).

•6 'Από τήν ἐξίσωση αὐτή τῶν n+1 ἀγνώστων x , μπορεῖ νά προσδιορισθοῦν, βάσει τοῦ λογισμοῦ τῶν συνδυασμῶν, οἱ τρεῖς : $x_0$ , $x_1$ καί $x_{n=4}$.

•7 Διότι, γιά τυχόντα ν-ψήφιο ($\nu > 3$) πρέπει νά εἶναι

$$x_0 = 1$$

ἐπειδή μόνο μία διάταξη ὁσωνδήποτε n συμβόλων ἰσότητος ὑπάρχει. "Αν καί εἶναι τοῦτο αὐτονόητο, δίδεται καί ἀπό τόν τύπο τῆς §28 :

$$x_0 = {}_{R}A^{n=4}_{m=1} = m^n = 1^n = 1$$

•8 'Επίσης, γιά τυχόντα ν-ψήφιο ἀκέραιο ($\nu > 3$) πρέπει νά εἶναι

$$x_1 = 2n$$

διότι, στή δεύτερη ὁμάδα ἰσοδυνάμων διατάξεων (βλ.10-ψήφιο §42 •1) κάθε μιά τους πρέπει νά περιλαμβάνει n−1 (= 3) σύμβολα ἰσότητος καί

μόνο ἕνα ὑπεροχῆς ( > εἴτε < ).

•9 Τό κάθε σύμβολο αὐτό μπορεῖ νά μετατεθῆ σέ $n$ ψηφιακές θέσεις, ἄρα τά δύο σύμβολα πραγματοποιοῦν $2n$ μεταθέσεις.

•10 Καί ἀκόμη, γιά τυχόντα ν-ψήφιο ($\nu > 3$) πρέπει νά εἶναι

$$x_{n=4} = 2^n$$

(καί γιά τόν δοθέντα 10-ψήφιο : $x_{n=4} = 2^{n=4} = 16$).
Διότι, στήν τελευταία ὁμάδα (§42•1) δέν ὑπάρχει κανένα σύμβολο ἰσότητος ἀλλά διατάξεις μετ' ἐπαναλήψεως δύο συμβόλων ὑπεροχῆς ( >, < ), δύο δηλ. συμβόλων ($m = 2$) γιά $n = 4$ ψηφιακές θέσεις. Ἄρα

$$X_n = {}^{R}A^{n=4}_{m=2} = 2^n$$

Ἑπομένως στόν παραπάνω τύπο (§43 •5) μένουν ἄγνωστα προσδιοριστέα μεγέθη πλήθους $n + 1 - 3 = n - 2 = 2$ (τά $x_2$ καί $x_3$).

•11 Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα :

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 10^{p=4} \times 45^{n-p=0} \times 45^1 = 10^4 \times 45^1 \\
\mu_1 &= 10^{p=3} \times 45^{n-p=1} \times 45^1 = 10^3 \times 45^2 \\
\mu_2 &= 10^{p=2} \times 45^{n-p=2} \times 45^1 = 10^2 \times 45^3 \\
\mu_3 &= 10^{p=1} \times 45^{n-p=3} \times 45^1 = 10^1 \times 45^4 \\
\mu_{n=4} &= 10^{p=0} \times 45^{n-p=4} \times 45^1 = 10^0 \times 45^5
\end{aligned}$$

•12 Κατά τήν ἐξίσωση τῆς §43·5 καί σύμφωνα μέ τίς τιμές $x_0 = 1, x_1 = 2n = 8$ καί $x_{n=4} = 2^{n=4} = 16$, προκύπτει :

(1) $\mu_0(x_0=1) + \mu_1(x_1=8) + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_n(x_n = 2^4) = 45 \times 10^{2n}$

[τό δεύτερο μέλος εἶναι τό σύνολο τῶν ὀρθίων 10-ψηφίων ἀκεραίων, δηλ. : ἴσο μέ $45 \times 10^8$ (§3)] ἤ :

$$\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 45 \times 10^8 - \mu_0 - 8\mu_1 - 16\mu_4$$

•13 Ἀλλά ἐπειδή $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3^n = 3^4 = 81$

καί $x_0 + x_1 + x_4 = 1 + 8 + 16 = 25$

(2) $x_2 + x_3 = 56$

Ἡ (2) μπορεῖ νά γίνει: $\mu_3 x_2 + \mu_3 x_3 = 56\mu_3$ καί ἀφαιρουμένη ἀπό τήν (1) δίδει :

$$(\mu_2 - \mu_3) x_2 = 45 \times 10^8 - \mu_0 - 8\mu_1 - 16\mu_4 - 56\mu_3$$

ἡ ὁποία, μετά τήν ἀντικατάσταση τῶν τιμῶν μ δίδει :

$$x_2 = 24$$

ἄρα καί

$$x_3 = 56 - x_2 = 32$$

•14 Τό διώνυμο $(1+2)^n$ (§43 •3) ἀναπτυσσόμενο δίδει τούς ἑξῆς ὅρους k:

$$(1+2)^n = \underset{k_0}{1^n} + \underset{k_1}{n\,2^1} + \underset{k_2}{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 2^2} + \ldots\ldots + \underset{k_{n-1}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\ \ldots\ldots(n-1)}\cdot 2^{n-1}} + \underset{k_n}{2^n}$$

Καί γιά $n = 4$ :

$$(1+2)^4 = \underset{\substack{k_0\\x_0}}{1} + \underset{\substack{k_1\\x_1}}{8} + \underset{\substack{k_2\\x_2}}{24} + \underset{\substack{k_3\\x_3}}{32} + \underset{\substack{k_4\\x_4}}{16} = 81$$

ὅρους πού εἶναι ἴσοι ἀντιστοίχως μέ τίς τιμές x (§43 •12).
Συνεπῶς καί τό δεύτερο σκέλος τοῦ θεωρήματος τῆς §41 ἀπεδείχθη.

§44 •1 Π α ρ α τ ή ρ η σ η : 'Η ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος ἔγινε δυνατή μέ τήν λύση ἑνός συστήματος $n+1 = 5$ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ $n+1$ ἀγνώστους (§43 •5,•7,•8,•10 καί •13), ἐκ τῶν ὁποίων ἐξισώσεων οἱ τρεῖς (•7, •8 καί •10) ἐπήγασαν ἀπό τόν λογισμό τῶν συνδυασμῶν.

•2 Ἄν ὅμως ἐπιζητηθῇ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος γιά $n \geqq 5$ , ὁπότε οἱ ἄγνωστοι θά εἶναι περισσότεροι τῶν 6, θά πρέπει τότε εἴτε νά διερευνηθῇ βαθύτερα ὁ ὑπολογισμός τῶν συνδυασμῶν ὥστε νά δικαιολογηθοῦν καί ἄλλες τιμές τῶν x [τῶν $x_2$, $x_3$, ............ , ἀσχέτως βέβαια τῶν ἀντιστοίχων γνωστῶν $k_2$ , $k_3$,............... τοῦ διωνύμου $(1+2)^n$] , εἴτε νά θεωρηθῇ ἀκλόνητος ἡ ἀποδεικτική δύναμη τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου ἐν προκειμένῳ.

•3 Πάντως, γιά παράδειγμα, δέν εἶναι δύσκολο ν' ἀποδειχθῇ πώς ἡ τιμή τοῦ ἀγνώστου $x_2$ στόν δοθέντα 10-ψήφιο εἶναι $2\,n(n-1) = 24$ [γιά τήν τρίτη ὁμάδα ἰσοδυνάμων διατάξεων (§42 •1)] .

§45 Γ ε ν ι κ ή ἐ φ α ρ μ ο γ ή ἐπί 15-ψηφίου ὀρθίου ἀκεραίου (§2):

$$\overset{>}{\phi_1}\ \underbrace{\phi_2\ \phi_3\ \phi_4\ \phi_5\ \phi_6\ \phi_7}_{n}\ \Big|\ \phi_8\ \phi_9\ \phi_{10}\ \phi_{11}\ \phi_{12}\ \phi_{13}\ \phi_{14}\ \phi_{15} \qquad (\phi_1 > \phi_{15})$$

•1 Πλῆθος ψηφίων .................................................................................. $\nu = 15$

•2 Πλῆθος 15-ψηφίων ὀρθίων ἀκεραίων (§3) ........................................ $45 \times 10^{13}$

•3 Πλῆθος n ἐσωτερικῶν ἀριστερῶν ψηφίων (§18 •1) ......... $n = \frac{\nu-3}{2} = 6$

•4 Πλῆθος διατάξεων μετ' ἐπαναλήψεως τῶν
συμβόλων συγκρίσεως (=,>,<) (§28) ...................... $3^n = 3^6 = 729$

•5 'Ανάπτυξη τῆς δυνάμεως $3^{n=6} = 729$ ὡς διωνύμου Νεύτωνος (§41) :

$$(1+2)^6 = \underset{1}{1} + \underset{2}{12} + \underset{3}{60} + \underset{4}{160} + \underset{5}{240} + \underset{6}{192} + \underset{7}{64} = 729$$

•6 Πλῆθος τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων (§41) ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ διωνύμου ...................... $n + 1 = 7$

•7 Τύπος ὑπολογισμοῦ τοῦ ἑκάστοτε πλήθους $\mu'$ τῶν 15-ψηφίων πού ἀντιστοιχοῦν σέ κάθε ὁμάδα ἰσοδ.διατάξεων (§30, §31):

$$\mu' = 10^{p+1} \times 45^{n-p+1}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1η ὁμάδα | $p_1 = 6$ | $\mu'_1$ | $= 10^7 \times 45^1$ |
| 2η " | $p_2 = 5$ | $\mu'_2$ | $= 10^6 \times 45^2$ |
| 3η " | $p_3 = 4$ | $\mu'_3$ | $= 10^5 \times 45^3$ |
| 4η " | $p_4 = 3$ | $\mu'_4$ | $= 10^4 \times 45^4$ |
| 5η " | $p_5 = 2$ | $\mu'_5$ | $= 10^3 \times 45^5$ |
| 6η " | $p_6 = 1$ | $\mu_6$ | $= 10^2 \times 45^6$ |
| 7η " | $p_7 = 0$ | $\mu'_7$ | $= 10^1 \times 45^7$ |

•8 Δέον : $\mu'_1 \cdot 1 + \mu'_2 \cdot 12 + \mu'_3 \cdot 60 + \mu'_4 \cdot 160 + \mu'_5 \cdot 240 + \mu'_6 \cdot 192 + \mu'_7 \cdot 64 =$

$= 45 \cdot 10^{13}$ ὅσο τό πλῆθος τῶν ὀρθίων 15-ψηφίων.

$$45 \left[10^7 + 45 \cdot 10^6 \cdot 12 + 45^2 \cdot 10^5 \cdot 60 + 45^3 \cdot 10^4 \cdot 160 + 45^4 \cdot 10^3 \cdot 240 + 45^5 \cdot 10^2 \cdot 192 + 45^6 \cdot 10^1 \cdot 64\right] =$$

$$45 \left[10^7 + 540 \cdot 10^6 + 121500 \cdot 10^5 + 14580000 \cdot 10^4 + 984150000 \cdot 10^3 + 35429400000 \cdot 10^2 + 531441000000 \cdot 10^1\right] =$$

$$45 \cdot 10^7 \left[1 + 54 + 1215 + 14580 + 98415 + 354294 + 531441\right] =$$

$$45 \cdot 10^7 \cdot 10^6 = \underline{45 \cdot 10^{13}}$$

•9 Τό ἀμέσως προηγούμενο ἄθροισμα [μέσα σέ ἀγκύλες] εἶναι ὁ ἀριθμός $10^6$. Αὐτό ἀποδεικνύεται ὄχι δύσκολα, διότι κάθε προσθετέος εἶναι γινόμενο τοῦ ἀντίστοιχου προσθετέου τοῦ ἀναπτύγματος $(1 + 2)^6$ (§45 •5) ἐπί μία ἀντίστοιχη δύναμη (μέ ἐκθέτη ἀπό 0 ἕως 6) τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{45}{10}$ ὅπου ὁ 45 εἶναι, ὡς ἐλέχθη, τό ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, τοῦ ὁποίου ἀριθμοῦ 45 οἱ δυνάμεις ἀπό 0 ἕως 6 ὑπεισέρχονται στά πλήθη $\mu'_1$ ἕως $\mu'_7$ (βλ. §45 •7). Δεδομένου δέ ὅτι κάθε ὅρος (προσθετέος) τοῦ ἀναπτύγματος ἑνός διωνύμου $(x+\alpha)^n$ (κατά τόν τύπο τοῦ Νεύτωνος) περιέχει καί τίς δυνάμεις τῶν x καί α μέ ἐκθέτη ἀπό $n=0$ ἕως $n=n$ ἕπεται ὅτι ἄν κάθε προσθετέος τοῦ διωνύμου, ἔστω τοῦ $(x+\alpha)^{n=5}$, πολλαπλασιασθῆ καταλλήλως, ὅπως κατωτέρω, ἐπί τίς δυνάμεις δύο τυχόντων ἀριθμῶν y καί b προκύπτει ὅτι τό διδόμενο διώνυμο παράγει ἄλλο διώνυμο μέ τόν αὐτό ἐκθέτη.

Ἄς ὑποτεθῆ λοιπόν ὅτι οἱ δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ x πολλαπλασιάζονται ἐπί τίς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ y καί οἱ δυνάμεις τοῦ α ἐπί τίς τοῦ b :

$$(x+\alpha)^5 = \alpha^0 x^5 + 5\alpha^1 x^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}\alpha^2 x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\alpha^4 x^1 + \alpha^5 x^0$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y^0$ | $y^1$ | $y^2$ | $y^3$ | $y^4$ | $y^5$ |
| $b^5$ | $b^4$ | $b^3$ | $b^2$ | $b^1$ | $b^0$ |

$$(x+\alpha)_1^5 = \alpha^0 b^5 x^5 y^0 + 5\alpha^1 b^4 x^4 y^1 + 10\alpha^2 b^3 x^3 y^2 + 10\alpha^3 b^2 x^2 y^3 + 5\alpha^4 b^1 x^1 y^4 + \alpha^5 b^0 x^0 y^5$$
$$= b^5 x^5 + 5\alpha^1 b^4 x^4 y^1 + 10\alpha^2 b^3 x^3 y^2 + 10\alpha^3 b^2 x^2 y^3 + 5\alpha^4 b^1 x^1 y^4 + \alpha^5 y^5$$

Ἄς κληθοῦν : $\frac{y}{x} = \lambda$ , $\frac{b}{\alpha} = \varkappa$ , ὅτε $y = \lambda x$ καί $b = \varkappa\alpha$

Οἱ ἀριθμοί y καί b πρέπει νά ἐκλεγοῦν κατά τρόπο ποὺ οἱ λ καί κ νά εἶναι εἴτε ἀκέραιοι εἴτε δεκαδικοί μή ἀσύμμετροι καί μή περιοδικοί. Ἄρα

$$(x+\alpha)_1^{n=5} = \varkappa^5(\alpha x)^5 + 5\varkappa^4\lambda^1(\alpha x)^5 + 10\varkappa^3\lambda^2(\alpha x)^5 + 10\varkappa^2\lambda^3(\alpha x)^5 + 5\varkappa^1\lambda^4(\alpha x)^5 + \lambda^5(\alpha x)^5$$

$$\left[\frac{(x+\alpha)_1}{\alpha x}\right]^{n=5} = \varkappa^5 + 5\varkappa^4\lambda^1 + 10\varkappa^3\lambda^2 + 10\varkappa^2\lambda^3 + 5\varkappa^1\lambda^4 + \lambda^5 = (\varkappa+\lambda)^{n=5}$$

Δηλ. τό δοθέν διώνυμο (x+α) παράγει τό διώνυμο (κ+λ).

•10 Κατ' ἐπέκτασιν μπορεῖ νά ὑποστηριχθῆ πώς κάθε διώνυμο εἶναι ἱκανό, μέ τόν τρόπο αὐτό, νά προκαλέσει τόν σχηματισμό ἀπείρου πλήθους διωνύμων, ἀρκεῖ νά προβλέπεται κάθε φορά ὥστε οἱ λόγοι λ καί κ νά εἶναι κατάλληλοι, ὡς ἐλέχθη.

•11 Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι δυνατόν ὅπως ἕνα διδόμενο διώνυμο τῆς μορφῆς (1+α) ὑψούμενο στήν τυχοῦσα δύναμη μέ ἐκθέτη n δίδει μιά ἰσότιμη δύναμη $10^n$. Διότι :

Στό προηγούμενο διώνυμο, ἄν x = 1 καί n = 5 , τό ἀνάπτυγμα δίδει :

$$(1+\alpha)^5 = 1 + 5\alpha + 10\alpha^2 + 10\alpha^3 + 5\alpha^4 + \alpha^5$$

Γιά νά βρεθῆ μιά ἰσότιμη δύναμη τοῦ 10, δηλ.μιά δύναμη $10^5 = (1+9)^5$ , πρέπει νά ἐκλεγῆ ἕνας λόγος $\varkappa = \frac{9}{\alpha}$ κατάλληλος.

Ἔστω πώς α = 2 ὁπότε $\varkappa = \frac{9}{2}$ καί ὅτι λ = 1 . Τότε :

$$(1+2)^5 = 1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^0 \left(\frac{9}{2}\right)^1 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\right)^3 \left(\frac{9}{2}\right)^4 \left(\frac{9}{2}\right)^5$$

$$1 + 45 + 810 + 7290 + 32805 + 59049 = 100000 = 10^5 = (1+9)^5$$

•12 Δέν εἶναι ἄσκοπο νά δοθοῦν μερικά ἀναπτύγματα τοῦ διωνύμου (1+2) σέ μιά σειρά δυνάμεων n ἀπό 2 ἕως 7 :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1+2)^2$ | = 1 | + 4 | + 4 | | | | | | = | 9 |
| $(1+2)^3$ | = 1 | + 6 | + 12 | + 8 | | | | | = | 27 |
| $(1+2)^4$ | = 1 | + 8 | + 24 | + 32 | + 16 | | | | = | 81 |
| $(1+2)^5$ | = 1 | + 10 | + 40 | + 80 | + 80 | + 32 | | | = | 243 |
| $(1+2)^6$ | = 1 | + 12 | + 60 | + 160 | + 240 | + 192 | + 64 | | = | 729 |
| $(1+2)^7$ | = 1 | + 14 | + 84 | + 280 | + 560 | + 672 | + 448 | + 128 | = | 2187 |

## ΚΕΦ. 5 Α Ν Α Σ Τ Ρ Ο Φ Ο Ι   Κ Α Ι   Σ Τ Α Θ Μ Ε Σ

§46 •1 Ἀ ν ά σ τ ρ ο φ ο ς δοθέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, θετικοῦ, μή μονοψηφίου, ἄς κληθῆ ὁ ἀκέραιος ἐκεῖνος πού διαβάζεται καί γράφεται κατ' ἀνάστροφη (κατοπτρική) φορά ὡς πρός τόν δοθέντα.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (π.χ. οἱ ἀκέραιοι πολυψήφιοι | 100 | 1907 | 9057 | 23 | 823456 |
| ἔχουν ἀναστρόφους τούς ἑξῆς: | 1 | 7091 | 7509 | 32 | 654328). |

•2 Δέν πρέπει νά γίνει σύγχυση μεταξύ τῶν ὅρων "ἀνάστροφοι" καί "ἀντίστροφοι" (ἀντίστροφοι καλοῦνται δύο ἀριθμοί τῶν ὁποίων τό γινόμενο ἰσοῦται, κατά τά γνωστά, πρός τήν μονάδα).

§47 Θ ε ώ ρ η μ α . Ἡ διαφορά D μεταξύ ἑνός ἀκεραίου ὀρθίου ν-ψηφίου θετικοῦ ἀριθμοῦ C καί τοῦ ἀναστρόφου του Ɔ (D = C − Ɔ) προστιθεμένη στόν δικό της ἀνάστροφο ɑ δίδει ἄθροισμα Σ πού
[3] εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 3 μέ ν ἤ ν+1 ψηφία, μεταξύ τῶν ὁποίων οὐδέποτε ὑπάρχουν τά ψηφία 2, 3, 4, 5, 6 καί 7. Τό ἄθροισμα τοῦτο Σ εἶναι κοινό γιά ὅλους τούς ν-ψηφίους ἀκεραίους τούς ὑπαγομένους στήν ἴδια ψηφιακή διάταξη μέ τόν δοθέντα C, ἀνεξάρτητο δέ ἀπό τήν τιμή τῶν ψηφίων παντός ἀκεραίου. Τό ἄθροισμα Σ ἄς κληθῆ σ τ ά θ μ η τοῦ C.

§48 Πρό τῆς ἀποδείξεως δίδονται ὡς παραδείγματα διάφορα ὑποσύνολα ὀρθίων ($\psi_1 > \psi_\nu$) ἀκεραίων, καθένα τῶν ὁποίων ὑπάγεται στήν ἴδια ψηφιακή διάταξη, ἐπί τῶν ὁποίων ἐκτελεῖται ἡ ὡς ἄνω διαδικασία τῆς ἀναστροφῆς :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ν = 2 | C | − | 52 | 21 | 40 | 83 | 92 |
| | Ɔ | | 25 | 12 | 04 | 38 | 29 |
| | D | + | 27 | 09 | 36 | 45 | 63 |
| | ɑ | | 72 | 90 | 63 | 54 | 36 |
| | Σ | | 99 | 99 | 99 | 99 | 99 |
| ν = 3 | | − | 351 | 403 | 712 | 922 | |
| | | | 153 | 304 | 217 | 229 | |
| | | + | 198 | 099 | 495 | 693 | |
| | | | 891 | 990 | 594 | 396 | |
| | | | 1089 | 1089 | 1089 | 1089 | |
| ν = 4 | | − | 2000 | 4111 | 7663 | 9331 | |
| | | | 0002 | 1114 | 3667 | 1339 | |
| | | + | 1998 | 2997 | 3996 | 7992 | |
| | | | 8991 | 7992 | 6993 | 2997 | |
| | | | 10989 | 10989 | 10989 | 10989 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ν = 7 | C | − | 1982990 | 2860781 | 5219322 | 9908796 |
| | Ɔ | | 0992891 | 1870682 | 2239125 | 6978099 |
| | D | + | 0990099 | 0990099 | 2980197 | 2930697 |
| | ᗡ | | 9900990 | 9900990 | 7910892 | 7960392 |
| | Σ | | 10891089 | 10891089 | 10891089 | 10891089 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ν = 10 | − | 6123403501 | 7602912345 | 9123703401 |
| | | 1053043216 | 5432192067 | 1043073219 |
| | + | 5070360285 | 2170720278 | 8080630182 |
| | | 5820630705 | 8720270712 | 2810360808 |
| | | 10890990990 | 10890990990 | 10890990990 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ν = 11 | − | 59107123172 | 91009701000 |
| | | 27132170195 | 00010790019 |
| | + | 31974952977 | 90998910981 |
| | | 77925947913 | 18901989909 |
| | | 109900900890 | 109900900890 |

•2 Γίνεται φανερό ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα ὅτι γιά νά προκύψει θετική τιμή τῆς διαφορᾶς D, ἐνδείκνυται ὅπως ὁ ἀνάστροφος Ɔ εἶναι μικρότερος τοῦ διδομένου ἀριθμοῦ C, ἐνδείκνυται δηλ. ὅπως ὁ C εἶναι ὄρθιος ($\phi_1 > \phi_\nu$, §2).

•3 'Αλλ' ἐάν ὁ διδόμενος C τύχει νά μήν εἶναι ὄρθιος ἀλλ' ὑποτελής ($\phi_1 < \phi_\nu$, §6), δέν δημιουργεῖται στίς ἐφεξῆς πράξεις κανένα πρόβλημα ὅταν ἀντιστραφῆ ὁ ρόλος τῶν C καί Ɔ.

•4 Συνεπῶς τό ὑποσύνολο τῶν ὑποτελῶν ἀκεραίων δέν θά πρέπει νά μετέχει στίς ἑπόμενες πράξεις ἀναστροφῆς.

•5 'Αλλά καί τό ὑποσύνολο τῶν ἰσοσκελῶν ἀκεραίων ($\phi_1 = \phi_\nu$, §4) θά πρέπει ν' ἀποκλεισθῆ ἀπό τίς πράξεις ἀναστροφῆς, ἐφόσον ὁ διδόμενος ἰσοσκελής C ἔχει καθένα ἐσωτερικό του ψηφίο ἴσο μέ τό συμμετρικό του (βλ. §49·2 περί πρώτου ψηφιακοῦ συνδυασμοῦ), διότι τότε εἶναι ἴσος μέ τόν ἀνάστροφο του Ɔ καί ἡ διαφορά D εἶναι μηδέν.

•6 Σέ ἄλλη περίπτωση πού στόν ἰσοσκελῆ ν-ψήφιο C ὑπάρχει ἄλλος ψηφιακός συνδυασμός, δηλ. $\phi_2 > \phi_{\nu-1}$ καί ἰσότης ἤ ἀνισότης ἄλλου ἐσωτερικοῦ ψηφίου ὡς πρός τό συμμετρικό του, ἡ ἀφαίρεση τοῦ ἀναστρόφου Ɔ εἶναι δυνατή ἀλλ' οἱ συνέπειες τῆς ἀναστροφῆς περιορίζονται, σάν νά ἦταν ὁ C ἕνας (ν-2)-ψήφιος, διότι τά δύο ἀκραῖα ψηφία τῆς διαφορᾶς D θά εἶναι

μηδενικά. Π.χ.

$$\begin{array}{rcl} C & = & 5936275 \\ -\;Ɔ & = & \underline{5726395} \\ D & = & 0209880 \end{array}$$

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα ὅμως θά προέκυπτε ἄν ἀντί τοῦ 7-ψηφίου C δινόταν ὁ 5-ψήφιος,

$$\begin{array}{rcl} C & = & 93627 \\ -\;Ɔ & = & \underline{72639} \\ D & = & 20988 \\ +\;\mathbb{C} & = & \underline{88902} \\ \Sigma_2 & = & 109890 \end{array}$$

Ἡ πράξη ἄρα τῆς ἀναστροφῆς στόν δοθέντα 7-ψήφιο ἰσοσκελῆ καταλήγει στή δεύτερη στάθμη $\Sigma_2$ ἑνός 5-ψηφίου ὀρθίου ὑπό τόν δεύτερο ψηφιακό συνδυασμό (βλ. πίνακα τῆς §53).

§49 Ἀ π ό δ ε ι ξ η τοῦ θεωρήματος τῆς §47 :

•1 Ἔστω 6-ψήφιος ὄρθιος ἀκέραιος $C = \phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ \phi_4\ \phi_5\ \phi_6$ μέ $n = \frac{\nu-2}{2} = 2$, πού ἀναφέρεται καί στό παράδειγμα τῆς §28 •1 μέ τή σειρά τῶν $3^n = 9$ ψηφιακῶν του συνδυασμῶν.

•2 Ἔστω ἀκόμη πώς στά γράμματα φ δίδονται ἀριθμητικές τιμές καί ὁ C παρουσιάζεται μέ τήν τυχοῦσα ἀλλά συγκεκριμένη μορφή $C = 5\overline{\overline{8}}\overline{\overline{6}}683$ καί μέ τόν ὑπ' ἀριθ.1 ψηφιακό συνδυασμό $\phi_1\ \overline{\overline{\phi_2}}\ \overline{\overline{\phi_3}}\,|\,\phi_4\ \phi_5\ \phi_6$

Ἄς ἀφαιρεθῆ ὁ ἀνάστροφος Ɔ ἀπό τόν C

$$\begin{array}{rcl} Ɔ & = & \underline{386685} \\ C - Ɔ = D & = & 199998 \end{array}$$

•3 Κατά τήν ἀφαίρεση τοῦ Ɔ ἀπό τόν C, τό τελευταῖο ψηφίο 5 τοῦ Ɔ ἀφαιρεῖται ἀπό τό τελευταῖο ψηφίο 3 τοῦ C, ψηφίο πού εἶναι πάντοτε μικρότερο του, ἐπειδή ὁ C ὑπετέθη ὄρθιος ($\phi_1 > \phi_6$). Σέ ἀφαίρεση αὐτῆς τῆς μορφῆς στήν ὁποίαν ὅλα τά ἐσωτερικά ψηφία (§10) τόσο τοῦ C ὅσο καί τοῦ Ɔ εἶναι τά ἴδια κατά τιμή καί κατά θέση πρός ἄλληλα (μέ τήν παρατήρηση ὅτι κάθε ἐσωτερικό ψηφίο τῆς D ἔχει τήν τιμή 9), πρέπει νά γίνει κατάλληλη "προσθαφαίρεση" στά ψηφία τοῦ C ἀπό τοῦ τελευταίου πρός τό πρῶτο, κατά μονάδα, δεκάδα, ἑκατοντάδα κ.ο.κ.

•4 Ἔτσι ὁ C πρέπει νά ἐμφανισθῆ μέ τήν ἰσότιμη μορφή :

$$C = [10^5\cdot 5 - 10^5] + [10^4\cdot 8 - 10^4 + 10^5] + [10^3\cdot 6 - 10^3 + 10^4] + [10^2\cdot 6 - 10^2 + 10^3] + [10^1\cdot 8 - 10^1 + 10^2] + [10^0\cdot 3 + 10^1] \quad ἤ$$

$$C = 10^5(5-1) + 10^4(8-1+10) + 10^3(6-1+10) + 10^2(6-1+10) + 10^1(8-1+10) + 10^0(3+10) \quad ἤ$$

$$
\begin{array}{rcllllll}
\mathrm{C} & = & 10^5\cdot 4 & +\ 10^4\cdot 17 & +\ 10^3\cdot 15 & +\ 10^2\cdot 15 & +\ 10^1\cdot 17 & +\ 10^0\cdot 13 \\
-\ \text{Ɔ} & = & 10^5\cdot 3 & +\ 10^4\cdot 8 & +\ 10^3\cdot 6 & +\ 10^2\cdot 6 & +\ 10^1\cdot 8 & +\ 10^0\cdot 5 \\
\hline
D & = & 10^5\cdot 1 & +\ 10^4\cdot 9 & +\ 10^3\cdot 9 & +\ 10^2\cdot 9 & +\ 10^1\cdot 9 & +\ 10^0\cdot 8 \quad = 199998
\end{array}
$$

$$\mathbb{C} = 899991$$

$$\Sigma = D + \mathbb{C} = 1099989$$

•5 'Εάν όμως ό C δέν ύπάγεται στόν πρώτο ψηφιακό συνδυασμό άλλά σέ άλλο, ή ώς άνω "προσθαφαίρεση" στά ψηφία του δέν πρέπει νά είναι γενική, άλλ' ίδιάζουσα γιά κάθε μορφή συνδυασμοΰ. Αύτό άπορρέει άπό τήν διερεύνηση καθενός συνδυασμοΰ καί όδηγεϊ στήν έξής πρόταση :

•6 Π ρ ό τ α σ η . 'Η άπόδειξη τοΰ θεωρήματος τής §47 έπί ν-ψηφίου όρθίου άκεραίου διδομένου ύπό γενική ψηφιακή μορφή $10^{\nu-1}\cdot\psi_1 + 10^{\nu-2}\cdot\psi_2 + \cdots\cdots + 10^2\cdot\psi_{\nu-2} + 10^1\cdot\psi_{\nu-1} + 10^0\cdot\psi_\nu$ δέν είναι δυνατή χωρίς τήν προεκλογή ένός ψηφιακοΰ συνδυασμοΰ έκ τών $3^n$ ό όποϊος θά έπηρεάσει καταλλήλως τήν γενική μορφή (§49 •4) τοΰ C .

'Η κατάλληλη αύτή έπήρεια φαίνεται άπό τά έπακολουθοΰντα :

•7 Ψηφιακός συνδυασμός πρώτος (§28 •1), έπί όρθίου 6-ψηφίου μέ τυχόντα ψηφία $\psi_1$ έως $\psi_6$ $[\psi_1 > \psi_6\ ,\ \psi_2 = \psi_5\ ,\ \psi_3 = \psi_4]$. 'Η προσθαφαίρεση πρέπει νά είναι γενική σέ όλα τά ψηφία (§49 •3 & •4).

$$\mathrm{C} = 10^5\cdot\psi_1 + 10^4\cdot\psi_2 + 10^3\cdot\psi_3 + 10^2\cdot\psi_4 + 10^1\cdot\psi_5 + 10^0\cdot\psi_6$$

$$\mathrm{C} = [10^5\cdot\psi_1 - 10^5] + [10^4\cdot\psi_2 + 10^5 - 10^4] + [10^3\cdot\psi_3 + 10^4 - 10^3] + $$
$$+ [10^2\cdot\psi_4 + 10^3 - 10^2] + [10^1\cdot\psi_5 + 10^2 - 10^1] + [10^0\cdot\psi_6 + 10^1]$$

$$-\ \text{Ɔ} = 10^5\cdot\psi_6 + 10^4\cdot\psi_5 + 10^3\cdot\psi_4 + 10^2\cdot\psi_3 + 10^1\cdot\psi_2 + 10^0\cdot\psi_1$$

$$\mathrm{C} - \text{Ɔ} = D = 10^5(\psi_1 - \psi_6 - 1) + 10^4(\psi_2 - \psi_5 + 9) + 10^3(\psi_3 - \psi_4 + 9) + 10^2(\psi_4 - \psi_3 + 9)$$
$$+ 10^1(\psi_5 - \psi_2 + 9) + 10^0(\psi_6 - \psi_1 + 10)$$

$$+\ \mathbb{C} = 10^5(\psi_6 - \psi_1 + 10) + 10^4(\psi_5 - \psi_2 + 9) + 10^3(\psi_4 - \psi_3 + 9) + 10^2(\psi_3 - \psi_4 + 9)$$
$$+ 10^1(\psi_2 - \psi_5 + 9) + 10^0(\psi_1 - \psi_6 - 1)$$

$$D + \mathbb{C} = \Sigma_1 = 10^5\cdot 9 + 10^4\cdot 18 + 10^3\cdot 18 + 10^2\cdot 18 + 10^1\cdot 18 + 10^0\cdot 9$$

$$\Sigma_1 = 1099989 = 99 \times \underbrace{11111}_{\nu-1}$$

•8 Παρατήρηση : 'Η στάθμη $\Sigma_1$ (§47) κοινή γιά όλους τούς 6-ψηφίους τοΰ ώς άνω ψηφιακοΰ συνδυασμοΰ, προκύπτει άνεξάρτητη άπό τίς τιμές τών $\psi$ . 'Η προσθαφαίρεση στά ψηφία τοΰ C ήταν, ώς έλέχθη, γενική.

•9 <u>Ψηφιακός συνδυασμός δεύτερος</u> (§28 •1)

ἐπί τυχόντος ὀρθίου 6-ψηφίου C.

Ἡ προσθαφαίρεση εἶναι ἀναγκαία μόνο στά ψηφία $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ καί $\varphi_5$.

| | | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $\varphi_4$ | $\varphi_5$ | $\varphi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C = | 5 | 9 | 3 | 3 | 0 | 4 |
| | | | > | = | | | |
| − | Ɔ = | 4 | 0 | 3 | 3 | 9 | 5 |
| C − Ɔ = | D = | 1 | 8 | 9 | 9 | 0 | 9 |
| + | Ɑ = | 9 | 0 | 9 | 9 | 8 | 1 |
| D + Ɑ = | Σ₂ = 1 | 0 | 9 | 9 | 8 | 9 | 0 |

$\varphi_1 > \varphi_6$, $\varphi_2 > \varphi_5$, $\varphi_3 = \varphi_4$

$$C = 10^5\cdot\varphi_1 + [10^4\cdot\varphi_2 - 10^4] + [10^3\cdot\varphi_3 + 10^4 - 10^3] + [10^2\cdot\varphi_4 + 10^3 - 10^2] + [10^1\cdot\varphi_5 + 10^2 - 10^1] + [10^0\cdot\varphi_6 + 10^1]$$

$$-\quad \text{Ɔ} = 10^5\cdot\varphi_6 + 10^4\cdot\varphi_5 + 10^3\cdot\varphi_4 + 10^2\cdot\varphi_3 + 10^1\cdot\varphi_2 + 10^0\cdot\varphi_1$$

$$C - \text{Ɔ} = D = 10^5(\varphi_1 - \varphi_6) + 10^4(\varphi_2 - \varphi_5 - 1) + 10^3(\varphi_3 - \varphi_4 + 9) + 10^2(\varphi_4 - \varphi_3 + 9) + 10^1(\varphi_5 - \varphi_2 + 9) + 10^0(\varphi_6 - \varphi_1 + 10)$$

$$+\quad \text{Ɑ} = 10^5(\varphi_6 - \varphi_1 + 10) + 10^4(\varphi_5 - \varphi_2 + 9) + 10^3(\varphi_4 - \varphi_3 + 9) + 10^2(\varphi_3 - \varphi_4 + 9) + 10^1(\varphi_2 - \varphi_5 - 1) + 10^0(\varphi_1 - \varphi_6)$$

$$D + \text{Ɑ} = \Sigma_2 = 10^5\cdot 10 + 10^4\cdot 8 + 10^3\cdot 18 + 10^2\cdot 18 + 10^1\cdot 8 + 10^0\cdot 10$$

$$\Sigma_2 = 1099890 = 99 \times \underbrace{11110}_{\nu-1}$$

•10 Καί ἡ στάθμη $\Sigma_2$ κοινή γιά ὅλους τούς 6-ψηφίους τοῦ ὡς ἄνω ψηφιακοῦ συνδυασμοῦ, προκύπτει ἀνεξάρτητη τῶν τιμῶν τῶν ψηφίων $\varphi$.

•11 <u>Ψηφιακός συνδυασμός ἕκτος</u> (§28 •1)

ἐπί τυχόντος ὀρθίου 6-ψηφίου C.

Ἡ προσθαφαίρεση εἶναι (§49 •3 & •4) ἀναγκαία μόνο στά $\varphi_4$, $\varphi_5$ καί $\varphi_6$.

| | | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $\varphi_4$ | $\varphi_5$ | $\varphi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C = | 5 | 8 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | | | > | > | | | |
| − | Ɔ = | 3 | 2 | 1 | 6 | 8 | 5 |
| C − Ɔ = | D = | 2 | 6 | 4 | 4 | 3 | 8 |
| + | Ɑ = | 8 | 3 | 4 | 4 | 6 | 2 |
| D + Ɑ = | Σ₆ = 1 | 0 | 9 | 8 | 9 | 0 | 0 |

$\varphi_1 > \varphi_6$, $\varphi_2 > \varphi_5$, $\varphi_3 > \varphi_4$

$$C = 10^5\cdot\varphi_1 + 10^4\cdot\varphi_2 + [10^3\cdot\varphi_3 - 10^3] + [10^2\cdot\varphi_4 + 10^3 - 10^2] + [10^1\cdot\varphi_5 + 10^2 - 10^1] + [10^0\cdot\varphi_6 + 10^1]$$

$$-\quad \text{Ɔ} = 10^5\cdot\varphi_6 + 10^4\cdot\varphi_5 + 10^3\cdot\varphi_4 + 10^2\cdot\varphi_3 + 10^1\cdot\varphi_2 + 10^0\cdot\varphi_1$$

$$C - \text{Ɔ} = D = 10^5(\varphi_1 - \varphi_6) + 10^4(\varphi_2 - \varphi_5) + 10^3(\varphi_3 - \varphi_4 - 1) + 10^2(\varphi_4 - \varphi_3 + 9) + 10^1(\varphi_5 - \varphi_2 + 9) + 10^0(\varphi_6 - \varphi_1 + 10)$$

$$+\quad \text{Ɑ} = 10^5(\varphi_6 - \varphi_1 + 10) + 10^4(\varphi_5 - \varphi_2 + 9) + 10^3(\varphi_4 - \varphi_3 + 9) + 10^2(\varphi_3 - \varphi_4 - 1) + 10^1(\varphi_2 - \varphi_5) + 10^0(\varphi_1 - \varphi_6)$$

$$D + \text{Ɑ} = \Sigma_6 = 10^5\cdot 10 + 10^4\cdot 9 + 10^3\cdot 8 + 10^2\cdot 8 + 10^1\cdot 9 + 10^0\cdot 10$$

$$\Sigma_6 = 1098900 = 99 \times \underbrace{11100}_{\nu-1}$$

•12 Καί ἡ στάθμη $\Sigma_6$ κοινή γιά τούς 6-ψηφίους τοῦ ὡς ἄνω ψηφιακοῦ συνδυασμοῦ προκύπτει ἀνεξάρτητη τῶν τιμῶν τῶν ψηφίων $\varphi$ (εἶναι δέ $\Sigma_6 < \Sigma_1$).

·13 <u>Ψηφιακός συνδυασμός ἕβδομος</u> (§28·1)

ἐπί τυχόντος ὀρθίου 6-ψηφίου C.
Ἡ προσθαφαίρεση (§49 ·3 & ·4) εἶναι ἀναγκαία μόνο στά $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_5$ & $\psi_6$.

| | | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C = | 5 | 0 | 1 | 9 | 8 | 3 |
| | | | < | < | | | |
| − | Ɔ = | 3 | 8 | 9 | 1 | 0 | 5 |
| C − Ɔ = | D = | 1 | 1 | 2 | 8 | 7 | 8 |
| + | Ȼ = | 8 | 7 | 8 | 2 | 1 | 1 |
| D + Ȼ = | $\Sigma_7$ = | 9 | 9 | 1 | 0 | 8 | 9 |

$\psi_1 > \psi_6$, $\psi_2 < \psi_5$, $\psi_3 < \psi_4$

$$C = [10^5\cdot\psi_1 - 10^5] + [10^4\cdot\psi_2 + 10^5 - 10^4] + [10^3\cdot\psi_3 + 10^4] + 10^2\cdot\psi_4 + [10^1\cdot\psi_5 - 10^1] + [10^0\cdot\psi_6 + 10^1]$$

$$-$$

$$Ɔ = 10^5\cdot\psi_6 + 10^4\cdot\psi_5 + 10^3\cdot\psi_4 + 10^2\cdot\psi_3 + 10^1\cdot\psi_2 + 10^0\cdot\psi_1$$

$$C - Ɔ = D = 10^5(\psi_1-\psi_6-1) + 10^4(\psi_2-\psi_5+9) + 10^3(\psi_3-\psi_4+10) + 10^2(\psi_4-\psi_3) + 10^1(\psi_5-\psi_2-1) + 10^0(\psi_6-\psi_1+10)$$

$$+$$

$$Ȼ = 10^5(\psi_6-\psi_1+10) + 10^4(\psi_5-\psi_2-1) + 10^3(\psi_4-\psi_3) + 10^2(\psi_3-\psi_4+10) + 10^1(\psi_2-\psi_5+9) + 10^0(\psi_1-\psi_6-1)$$

$$D + Ȼ = \Sigma_7 = 10^5\cdot 9 + 10^4\cdot 8 + 10^3\cdot 10 + 10^2\cdot 10 + 10^1\cdot 8 + 10^0\cdot 9$$

$$= 991089 = 99 \times \underbrace{10011}_{v-1}$$

·14 Καί ἡ στάθμη $\Sigma_7$ κοινή γιά ὅλους τούς 6-ψηφίους τοῦ ὡς ἄνω ψηφιακοῦ συνδυασμοῦ, προκύπτει ἀνεξάρτητη ἀπό τίς τιμές τῶν ψ.

·15 <u>Ψηφιακός συνδυασμός ἔνατος</u> (§28·1)

ἐπί τυχόντος ὀρθίου 6-ψηφίου C.
Ἡ προσθαφαίρεση (§49 ·3 & ·4) εἶναι ἀναγκαία μόνο στά $\psi_1, \psi_2, \psi_5$ & $\psi_6$.

| | | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C = | 5 | 1 | 3 | 3 | 9 | 4 |
| | | | < | = | | | |
| − | Ɔ = | 4 | 9 | 3 | 3 | 1 | 5 |
| C − Ɔ = | D = | 0 | 2 | 0 | 0 | 7 | 9 |
| + | Ȼ = | 9 | 7 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| D + Ȼ = | $\Sigma_9$ = | 9 | 9 | 0 | 0 | 9 | 9 |

$\psi_1 > \psi_6$, $\psi_2 < \psi_5$, $\psi_3 = \psi_4$

$$C = [10^5\psi_1 - 10^5] + [10^4\psi_2 + 10^5] + 10^3\psi_3 + 10^2\psi_4 + [10^1\psi_5 - 10^1] + [10^0\psi_6 + 10^1]$$

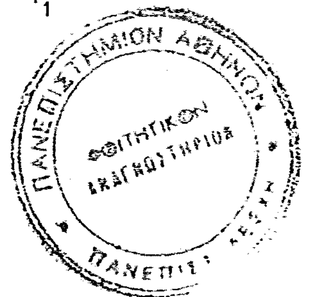
$$-$$

$$Ɔ = 10^5\psi_6 + 10^4\psi_5 + 10^3\psi_4 + 10^2\psi_3 + 10^1\psi_2 + 10^0\psi_1$$

$$D = 10^5(\psi_1-\psi_6-1) + 10^4(\psi_2-\psi_5+10) + 10^3(\psi_3-\psi_4) + 10^2(\psi_4-\psi_3) + 10^1(\psi_5-\psi_2-1) + 10^0(\psi_6-\psi_1+10)$$

$$+$$

$$Ȼ = 10^5(\psi_6-\psi_1+10) + 10^4(\psi_5-\psi_2-1) + 10^3(\psi_4-\psi_3) + 10^2(\psi_3-\psi_4) + 10^1(\psi_2-\psi_5+10) + 10^0(\psi_1-\psi_6-1)$$




$$\Sigma_9 = 10^5\cdot 9 + 10^4\cdot 9 + 0 + 0 + 10^1\cdot 9 + 10^0\cdot 9 = 990099 = 99 \times \underbrace{10001}_{v-1}$$

•16 Καί ἡ στάθμη $\Sigma_9$ κοινή γιά ὅλους τούς 6-ψηφίους τοῦ ὡς ἄνω συνδυασμοῦ, προκύπτει ἀνεξάρτητη ἀπό τίς τιμές τῶν φ. Εἶναι δέ ἡ χαμηλότερη ὅλων (δηλ. μέ τή μικρότερη τιμή).

§50 'Από τή διερεύνηση τῶν πράξεων ἀναστροφῆς, τῶν τιμῶν πού ἐμφανίζουν οἱ στάθμες Σ καί τοῦ συσχετισμοῦ ἀμφοτέρων μέ τήν ψηφιακή δομή τῶν ἀκεραίων, ἐξάγονται τά ἑξῆς συμπεράσματα τά ὁποῖα ἐπιβεβαιώνονται καί ἀποδεικνύονται στίς §48 καί §49, ἀλλά καί παρουσιάζονται στήν §53 :

•1 Οἱ στάθμες Σ εἶναι τόσες ὅσοι καί οἱ ψηφιακοί συνδυασμοί πού ἀναφέρονται σέ ὀρθίους ν-ψηφίους μέ ν = 2 , 3 , 4 καί 5 ψηφία, ἐνῶ εἶναι πάντοτε λιγότερες ἀπό τούς συνδυασμούς πού ἀναφέρονται σέ ἀκεραίους μέ ν = 6. Καί τοῦτο ἐπειδή (ὅπως φαίνεται στήν §53), σέ πολυψηφίους μέ ν = 6 παρουσιάζονται ψηφιακοί συνδυασμοί πού δίδουν κοινή στάθμη Σ γιά δύο ἤ περισσότερα ὑποσύνολα ν-ψηφίων ἀκεραίων.

•2 'Η στάθμη Σ οἱουδήποτε ὑποσυνόλου ν-ψηφίων ἀκεραίων εἶναι ἀριθμός ἀκέραιος μέ ν+1 ἤ ν ψηφία.Τοῦτο γίνεται αὐτονόητο ἀπό τόν τρόπο γενέσεως της στά παραδείγματα τῆς §48 καί ἀπό τόν Πίνακα τῆς §53.

•3 Κάθε στάθμη Σ συγκροτεῖται μόνο ἀπό τά ψηφία 0, 1, 8 καί 9.

•4 Τήν ὑψηλότερη στάθμη $\Sigma_1$ (δηλ. μέ τήν μεγαλύτερη ἀριθμητική τιμή) ἔχει τό ὑποσύνολο τῶν ὀρθίων ν-ψηφίων ἐκείνων στούς ὁποίους καθένα ἐσωτερικό ψηφίο τους (§10) εἶναι ἴσο μέ τό συμμετρικό του (§19).Δηλ. τό ὑποσύνολο πού ἔχει τόν ἀκόλουθο ψηφιακό συνδυασμό (βλ.καί §49 •7) :

$$\begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & \cdots & \psi_{\nu-2} & \psi_{\nu-1} & \psi_\nu \\ > & = & = & = & = & = & = \cdots = & = & = & < \end{matrix}$$

Οἱ ὄρθιοι αὐτοί ἀκέραιοι εἶναι οἱ ὀλιγοπληθέστεροι.Ἔχουν πλῆθος $10^n \times 45$ ἔνθα $n = \frac{\nu-2}{2}$ ἄν εἶναι ἀρτιοψήφιοι καί $10^{n+1} \times 45$ ἔνθα $n = \frac{\nu-3}{2}$ ἄν εἶναι περιττοψήφιοι (§29, §30). Π.χ. τέτοιοι ἀριθμοί εἶναι οἱ :

1000 98381 513314 987656781

'Η ὑψηλότερη στάθμη ἔχει ν+1 ψηφία. Πρῶτο ψηφίο εἶναι ἡ μονάς καί τελευταῖο τό 9.

•5 Τήν δεύτερη σέ ὕψος στάθμη $\Sigma_2$ ἔχει τό ὑποσύνολο τῶν ὀρθίων ν-ψηφίων (μέ ν ≧ 6) πού ὑπάγεται στόν ἀκόλουθο συνδυασμό (βλ.καί §49 •9) :

$$\begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \cdots\cdots & \psi_{\nu-2} & \psi_{\nu-1} & \psi_\nu \\ > & > & = & = & = & = = = = = = = = = = = = & < & < \end{matrix}$$

κατά τόν όποῖον τό δεύτερο ψηφίο εἶναι μεγαλύτερο τοῦ προτελευταίου καί καθένα τῶν ἐνδιαμέσων εἶναι ἴσο μέ τό συμμετρικό του (§19). Τέτοιοι ἀριθμοί εἶναι οἱ :

110000 983371 7912332105

Ἡ δεύτερη αὐτή στάθμη ἔχει ν+1 ψηφία, μέ πρῶτο τή μονάδα καί τελευταῖο τό μηδέν.

•6 Τή χαμηλότερη (μέ τή μικρότερη δηλ. ἀριθμητική τιμή) στάθμη παρουσιάζει τό ὑποσύνολο τῶν ὀρθίων ν-ψηφίων (μέ $\nu \geq 6$) πού ὑπάγεται στόν ἑξῆς ψηφιακό συνδυασμό (βλ. καί §49 •15) :

$$\begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \cdots\cdots & \psi_{\nu-2} & \psi_{\nu-1} & \psi_\nu \\ > & < & = & = & = & = = = = = = = = = = & = & > & < \end{matrix}$$

κατά τόν όποῖον δηλ. τό δεύτερο ψηφίο εἶναι μικρότερο τοῦ προτελευταίου καί καθένα τῶν ἐνδιαμέσων εἶναι ἴσο μέ τό συμμετρικό του (§19). Π.χ. τέτοιοι ἀριθμοί εἶναι οἱ :

100010 973381 7012332195

Ἡ στάθμη αὐτή ἔχει ν ψηφία ἐκ τῶν ὁποίων τό πρῶτο, τό δεύτερο, τό προτελευταῖο καί τό τελευταῖο εἶναι ὁ ἀριθμός 9, ἐνῶ τά ὑπόλοιπα ν-4 ἐσωτερικά ψηφία εἶναι μηδενικά.

•7 Π α ρ α τ ή ρ η σ η : Ὅπως φαίνεται καί ἀπό τόν Πίν. τῆς §53, οἱ διψήφιοι ἀκέραιοι (ν =2) πού δέν ἔχουν ἐσωτερικά ψηφία καί συνεπῶς οὔτε καί ψηφιακούς συνδυασμούς, παρουσιάζουν στάθμη Σ = 99 = 99 × 1.
Οἱ τριψήφιοι (ν =3) ἐπίσης δέν ἔχουν συνδυασμούς καί παρουσιάζουν στάθμη Σ = 1089 = 99 × 11.
Στά ὑποσύνολα τῶν 4-ψηφίων καί 5-ψηφίων ὀρθίων ἀριθμῶν, καθένας ἔχει ἀνά ἕνα ἐσωτερικό ψηφίο (n=1) καί ὑπάγεται σέ $3^{n=1}$ = 3 ψηφιακούς συνδυασμούς. Διαθέτει ἄρα καθένας τους ἀπό 3 στάθμες, ἡ πειό ὑψηλή τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ στό σύμβολο ἰσότητος (=) καί ἡ χαμηλότερη στό σύμβολο <.

•8 Στήν §54 ἀναπτύσσεται ἡ νομοτέλεια πού συνδέει ἕνα διδόμενο ψηφιακό συνδυασμό οἱουδήποτε ὑποσυνόλου ν-ψηφίων ἀκεραίων μέ τήν κοινή στάθμη Σ τῶν ἀκεραίων τούτων.

•9 Ἡ διαφορά D μεταξύ ἑνός ὀρθίου ἀκεραίου C καί τοῦ ἀναστρόφου του Ɔ (δηλ. D = C- Ɔ ) εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 (βλ. παραδείγματα §48).

Διότι : Ἔστω τυχών 6-ψήφιος C, ὁ ἀνάστροφος Ɔ καί ἡ διαφορά τους D :

$$\begin{aligned} C &= 10^5\psi_1 + 10^4\psi_2 + 10^3\psi_3 + 10^2\psi_4 + 10^1\psi_5 + 10^0\psi_6 \qquad (\psi_1 > \psi_6) \\ -\ Ɔ &= 10^5\psi_6 + 10^4\psi_5 + 10^3\psi_4 + 10^2\psi_3 + 10^1\psi_2 + 10^0\psi_1 \end{aligned}$$

$$C - Ɔ = D = 10^5(\psi_1-\psi_6) + 10^4(\psi_2-\psi_5) + 10^3(\psi_3-\psi_4) + 10^2(\psi_4-\psi_3) + 10^1(\psi_5-\psi_2) + 10^0(\psi_6-\psi_1)$$

$$D = (\psi_1-\psi_6)(10^5-10^0) + (\psi_2-\psi_5)(10^4-10^1) + (\psi_3-\psi_4)(10^3-10^2)$$

$$D = (\psi_1-\psi_6)\cdot 99999 + (\psi_2-\psi_5)\cdot 9990 + (\psi_3-\psi_4)\cdot 900$$

Ἄρα ἡ D εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 ἀσχέτως ἀπό τήν τιμή τῶν ψηφίων τοῦ C.

•10 Πόρισμα $1^{ον}$. Ἡ διαφορά D μεταξύ ἑνός ὀρθίου ἀκεραίου C καί τοῦ ἀναστρόφου του (D = C − Ɔ) εἶναι ἀνεξάρτητη τῆς τιμῆς τῶν συμμετρικῶν ἐκείνων ψηφίων πού εἶναι ἴσα. Διότι :
Ὅπως φαίνεται ἀπό τούς τύπους τῆς προηγουμένης §50 •9, κάθε ὅρος τῆς D

$$D = 10^5(\psi_1-\psi_6) + 10^4(\psi_2-\psi_5) + 10^3(\psi_3-\psi_4) + 10^2(\psi_4-\psi_3) + 10^1(\psi_5-\psi_2) + 10^0(\psi_0-\psi_1)$$

μηδενίζεται ὅταν τά ἐντός κάποιας παρενθέσεως ψηφία ψ (συμμετρικά) τύχει νά εἶναι ἴσα.

•11 Πόρισμα $2^{ον}$. Ἡ διαφορά D μεταξύ ἑνός ὀρθίου ἀκεραίου καί τοῦ ἀναστρόφου του Ɔ (D = C − Ɔ), εἶναι ἀνεξάρτητη τῆς τιμῆς τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων τοῦ C, ὅταν αὐτός ἀκολουθεῖ τόν πρῶτο ψηφιακό συνδυασμό, ὅταν δηλ. ἔχει τήν ὑψηλότερη στάθμη Σ.
Διότι, ὅπως φαίνεται ἀπό τούς τύπους τῆς προηγουμένης §50 •9, στήν περίπτωση αὐτή $\psi_2 = \psi_5$ καί $\psi_3 = \psi_4$. Ἄρα $D = 99999(\psi_1-\psi_6)$, εἶναι δηλ. ἡ D συνάρτηση μόνο τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκραίων ψηφίων τοῦ C.

•12 Πόρισμα $3^{ον}$. Ἡ στάθμη Σ οἱουδήποτε ὀρθίου ἀκεραίου εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3. Διότι :
Ἐφόσον ἡ D, ὡς ἀπεδείχθη πρίν, εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, καί ὁ ἀνάστροφος της Ɑ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, ἄρα καί τό ἄθροισμα Σ = D + Ɑ.

•13 Πόρισμα $4^{ον}$. Ἡ στάθμη Σ οἱουδήποτε ὀρθίου ν-ψηφίου ἀκεραίου —ὅπως φαίνεται στόν Πίνακα τῆς §53— εἶναι γινόμενο τοῦ 99 ἐπί ἕνα παράγοντα f πού ἀρχίζει ἀπό τήν μονάδα καί τόν ὁποῖον f συγκροτοῦν, γιά κάθε περίπτωση, μόνο μονάδες καί μηδενικά ( καί σέ μιά μόνο περίπτωση μόνο μονάδες).

•14 Τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ παράγοντος αὐτοῦ f εἶναι ν-1 καί ἡ ἐναλλαγή μονάδων καί μηδενικῶν σέ κάθε περίπτωση στάθμης, ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ψηφιακό συνδυασμό τοῦ διδομένου ἀκεραίου καί ἀκολουθεῖ, ὅπως ἐλέχθη πρίν (§50 •8), τή νομοτέλεια τῆς §54.

•15 <u>Πόρισμα $5^{ον}$</u>. Τό ἄθροισμα πολυψηφίων ἀκεραίων καί τό ἄθροισμα τῶν ἀναστρόφων τῶν ἀκεραίων τούτων, ἔχουν διαφορά πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ 3. Διότι :

$$^{C}A = C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_{\nu-1} + C_\nu$$

$$^{Ɔ}A = Ɔ_1 + Ɔ_2 + \cdots\cdots + Ɔ_{\nu-1} + Ɔ_\nu$$

$$^{C}A - {}^{Ɔ}A = [C_1 - Ɔ_1] + [C_2 - Ɔ_2] + \cdots\cdots + [C_{\nu-1} - Ɔ_{\nu-1}] + [C_\nu - Ɔ_\nu]$$

Ἀλλά $C_1 - Ɔ_1 = D_1, \cdots\cdots C_\nu - Ɔ_\nu = D_\nu$

$$^{C}A - {}^{Ɔ}A = D_1 + D_2 + \cdots\cdots + D_{\nu-1} + D_\nu$$

Κάθε D εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 (§50 •9). Συνεπῶς καί ἡ διαφορά $^{C}A - {}^{Ɔ}A$.

•16 <u>Πόρισμα $6^{ον}$</u>. Ἡ διαφορά δύο πολυψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν καί ἡ διαφορά τῶν ἀναστρόφων τῶν ἀκεραίων τούτων, ἔχουν διαφορά πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ 3. Διότι :

$$^{C}\Delta = C_1 - C_2$$

$$^{Ɔ}\Delta = Ɔ_1 - Ɔ_2$$

$$^{C}\Delta - {}^{Ɔ}\Delta = C_1 - C_2 - (Ɔ_1 - Ɔ_2) = C_1 - C_2 - Ɔ_1 + Ɔ_2$$

$$^{C}\Delta - {}^{Ɔ}\Delta = C_1 - Ɔ_1 - (C_2 - Ɔ_2) = D_1 - D_2 \qquad (§50\ 9)$$

Καί ἐπειδή κάθε D εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, εἶναι καί ἡ διαφορά $^{C}\Delta - {}^{Ɔ}\Delta$.

•17 <u>Πόρισμα $7^{ον}$</u>. Τό γινόμενο πολυψηφίων ἀκεραίων καί τό γινόμενο τῶν ἀναστρόφων τῶν ἀκεραίων τούτων, ἔχουν διαφορά πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ 3. Διότι :

$$^{C}\Gamma = C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4$$

$$^{Ɔ}\Gamma = Ɔ_1 \times Ɔ_2 \times Ɔ_3 \times Ɔ_4$$ Ἐπειδή $C - Ɔ = D$ (§50 •9) :

$$Ɔ_1 = C_1 - D_1,\ Ɔ_2 = C_2 - D_2,\ Ɔ_3 = C_3 - D_3,\ Ɔ_4 = C_4 - D_4$$

$$^{C}\Gamma - {}^{Ɔ}\Gamma = C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 - (C_1 - D_1)(C_2 - D_2)(C_3 - D_3)(C_4 - D_4)$$

$$= C_1C_2C_3D_4 + C_1C_2C_4D_3 + C_1C_3C_4D_2 + C_2C_3C_4D_1 - C_3C_4D_1D_2 - C_2C_4D_1D_3 - C_2C_3D_1D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_1C_3D_2D_4 - C_1C_2D_3D_4 + C_4D_1D_2D_3 + C_3D_1D_2D_4 + C_2D_1D_3D_4 + C_1D_2D_3D_4 - D_1D_2D_3D_4$$

Πάντες οἱ ὡς ἄνω προσθετέοι περιέχουν ἕκαστος τουλάχιστον ἀπό μιά φορά τόν παράγοντα D πού εἶναι, ὡς ἐλέχθη (§50 •9), πολλαπλάσιο τοῦ 3.

Συνεπῶς καί ἡ διαφορά τῶν γινομένων $^{C}\Gamma - {}^{Ɔ}\Gamma$, εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.

•18 <u>Πόρισμα 8ον</u>. Καθένα ἐκ τῶν τριῶν προηγουμένων πορισμάτων (5,6,7) εἰσάγει καί στηρίζει μιά πρωτότυπη μ έ θ ο δ ο ἐ λ έ γ χ ο υ τῆς ἀ κ ρ ι β ε ί α ς τῶν συνηθισμένων ἀριθμητικῶν πράξεων (προσθέσεως, ἀφαιρέσεως καί πολλαπλασιασμοῦ, ἀντιστοίχως).

Διότι : Ἀρκεῖ νά ἐπαναληφθοῦν ἐπί τῶν ἀναστρόφων τῶν διδομένων ἀριθμῶν οἱ τετελεσμένες ἀριθμητικές πράξεις καί νά ἐλεγχθῆ ἐάν οἱ διαφορές μεταξύ τῶν ἀποτελεσμάτων κάθε πράξεως, εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3.

§51 [4] Θ ε ώ ρ η μ α. Ἡ ὑψηλότερη στάθμη $\Sigma_1$ ὀρθίου ν-ψηφίου ἀκεραίου, προστιθεμένη στόν ἀνάστροφο της $Ƹ_1$ δίδει ἄθροισμα πού ἔχει τιμή δεκαπλασία τῆς στάθμης $\Sigma_1$, ἴσο δέ μέ τή δεύτερη στάθμη $\Sigma_2$ (§49 •9) ὀρθίου ἀκεραίου ἔχοντος ν+1 ψηφία.

Διότι : ἔστω ν-ψήφιος (ν=6) ὄρθιος ἀκέραιος C = 586683 (§49 •2)

$$\Sigma_1 = 1099989 \quad (§49 \cdot 7)$$
$$+\ Ƹ_1 = 9899901$$
$$\Sigma_1 + Ƹ_1 = 10999890 = 10 \times \Sigma_1$$

καί τυχών ἀκέραιος C' πού ἔχει ν+1 (=7) ψηφία, ὑπαγόμενος στόν δεύτερο ψηφιακό συνδυασμό (§49 •9)

| | | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ | $\psi_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | > | = | | | | |
| − C' | = | 5 | 9 | 3 | 2 | 3 | 0 | 4 |
| Ɔ' | = | 4 | 0 | 3 | 2 | 3 | 9 | 5 |
| C' − Ɔ' = D' | = | 1 | 8 | 9 | 9 | 9 | 0 | 9 |
| ᗡ' | = | 9 | 0 | 9 | 9 | 9 | 8 | 1 |
| D' + ᗡ' = $\Sigma_2'$ | = | 1 | 0 | 9 | 9 | 8 | 9 | 0 |

$= \Sigma_1 + Ƹ_1$ τοῦ C .

§52 Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος §51. Ἡ στάθμη $\Sigma_1$ ἑνός ἔστω 6-ψηφίου ὀρθίου ἀκεραίου ἔχει τελική μορφή πού δίδεται στήν §49 •7 (μορφή ἀνεξάρτητη ἀπό τίς τιμές τῶν ψηφίων τοῦ διδομένου ἀριθμοῦ) :

$$\Sigma_1 = 10^5\cdot 9 + 10^4\cdot 18 + 10^3\cdot 18 + 10^2\cdot 18 + 10^1\cdot 18 + 10^0\cdot 9 \quad \text{ἤ}$$
$$\Sigma_1 = 10^5\cdot 9 + 10^4(10+8) + 10^3(10+8) + 10^2(10+8) + 10^1(10+8) + 10^0\cdot 9$$
$$\Sigma_1 = 10^6\cdot 1 + 10^5\cdot 0 + 10^4\cdot 9 + 10^3\cdot 9 + 10^2\cdot 9 + 10^1\cdot 8 + 10^0\cdot 9 = 1099989$$
$$Ƹ_1 = 10^6\cdot 9 + 10^5\cdot 8 + 10^4\cdot 9 + 10^3\cdot 9 + 10^2\cdot 9 + 10^1\cdot 0 + 10^0\cdot 1 = 9899901$$
$$\Sigma_1 + Ƹ_1 = 10^7 + 10^5\cdot 8 + 10^4\cdot 18 + 10^3\cdot 18 + 10^2\cdot 18 + 10^1\cdot 8 + 10^1 = 10999890$$
$$\Sigma_1 + Ƹ_1 = 10^7 + 10^5\cdot 8 + 10^4(10+8) + 10^3(10+8) + 10^2(10+8) + 10^1\cdot 9$$
$$\Sigma_1 + Ƹ_1 = 10^7 + 10^5\cdot 9 + 10^4\cdot 9 + 10^3\cdot 9 + 10^2\cdot 8 + 10^1\cdot 9$$
$$\Sigma_1 + Ƹ_1 = 10\left[10^6\cdot 1 + 10^5\cdot 0 + 10^4\cdot 9 + 10^3\cdot 9 + 10^2\cdot 9 + 10^1\cdot 8 + 10^0\cdot 9\right] = 10\cdot\Sigma_1$$

Τό ἄθροισμα ὅμως τοῦτο (ἀνεξάρτητο καί αὐτό ἀπό τίς τιμές τῶν ψηφίων

τοῦ ἀκεραίου C) παρουσιάζεται εἰς τόν ἀμέσως προηγούμενο τύπο μέ τιμή δεκαπλάσια τῆς τιμῆς τοῦ $\Sigma_1$. 'Αποδεικνύεται ἀμέσως παρακάτω πώς τό ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ δεύτερη στάθμη $\Sigma_2'$ ἑνός ὑποσυνόλου ὀρθίων ἀκεραίων πού καθένας ἔχει ν+1 ψηφία (βλ.Πίνακα §53), ὑπαγόμενα δηλ. στόν δεύτερο ψηφιακό συνδυασμό (§49 ·9). 'Ιδού ἡ ἀπόδειξη :

Ἔστω τυχών ἀκέραιος ν+1 = 7 ψηφίων

$$C' = \overset{>}{\psi_1}\,\overset{>}{\psi_2}\,\overset{=}{\psi_3}\,\psi_4\,\psi_5\,\psi_6\,\psi_7 \qquad (\psi_1 > \psi_7\;,\;\psi_2 > \psi_6\;,\;\psi_3 = \psi_5)$$

$$C' = 10^6\psi_1 + 10^5\psi_2 + 10^4\psi_3 + 10^3\psi_4 + 10^2\psi_5 + 10^1\psi_6 + 10^0\psi_7$$

Καί γιά νά γίνει δυνατή ἡ ἀφαίρεση τοῦ ἀναστρόφου, ἐκτελεῖται ἡ κατάλληλη "προσθαφαίρεση" στούς προσθετέους :

$$C' = 10^6\psi_1 + (10^5\psi_2 - 10^5) + (10^4\psi_3 + 10^5 - 10^4) + (10^3\psi_4 + 10^4 - 10^3) +$$

$$+ (10^2\psi_5 + 10^3 - 10^2) + (10^1\psi_6 + 10^2 - 10^1) + (10^0\psi_7 + 10^1)$$

$$Ͻ' = 10^6\psi_7 + 10^5\psi_6 + 10^4\psi_5 + 10^3\psi_4 + 10^2\psi_3 + 10^1\psi_2 + 10^0\psi_1$$

$$C' - Ͻ' = D' = 10^6(\psi_1 - \psi_7) + 10^5(\psi_2 - \psi_6 - 1) + 10^4(\psi_3 - \psi_5 + 9) + 10^3(\psi_4 - \psi_4 + 9) +$$

$$+ 10^2(\psi_5 - \psi_3 + 9) + 10^1(\psi_6 - \psi_2 + 9) + 10^0(\psi_7 - \psi_1 + 10)$$

$$\text{ᗡ}' = 10^6(\psi_7 - \psi_1 + 10) + 10^5(\psi_6 - \psi_2 + 9) + 10^4(\psi_5 - \psi_3 + 9) + 10^3 \cdot 9 +$$

$$+ 10^2(\psi_3 - \psi_5 + 9) + 10^1(\psi_2 - \psi_6 - 1) + 10^0(\psi_1 - \psi_7)$$

$$D' + \text{ᗡ}' = \Sigma_2' = 10^6 \cdot 10 + 10^5 \cdot 8 + 10^4 \cdot 18 + 10^3 \cdot 18 + 10^2 \cdot 18 + 10^1 \cdot 8 + 10^0 \cdot 10$$

$$\Sigma_2' = 10^7 + 10^5 \cdot 8 + 10^4 \cdot 18 + 10^3 \cdot 18 + 10^2 \cdot 18 + 10^1 \cdot 8 + 10^1$$

$$= 10999890$$

Δηλ. $\Sigma_2' = \Sigma_1 + \text{Ƹ}_1$

Αὐτό γίνεται καί ἀμέσως φανερό μέ τή σύγκριση τῶν δύο παραπάνω τύπων $\Sigma_1 + \text{Ƹ}_1$ καί τοῦ $\Sigma_2'$ πού ἔχουν τούς ἴδιους ὅρους.

§53

# Π Ι Ν Α Ξ

## ΔΙΑ ν-ΨΗΦΙΟΥΣ ΟΡΘΙΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

| | | |
|---|---|---|
| n | ΠΛΗΘΟΣ ΑΡΙΣΤΕΡΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ | (§18) |
| Ψ Δ | ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ (=,>,<) | (§28) |
| ΟΜΙ | ΟΜΑΔΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ | (§41) |
| μ | ΠΛΗΘΟΣ ν-ΨΗΦΙΩΝ ΟΡΘΙΩΝ ΑΝΑ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΜΒΟΛΩΝ | (§29) |
| Σ | ΣΤΑΘΜΕΣ ΚΑΤΑ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΙΜΗ | (§47) |

| ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΟΡΘΙΟΙ | ν | n | Ψ Δ | ΟΜΙ | μ | Σ | = | 99 × f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_1 \mid \psi_2$ | 2 | - | - | - | $45^1$ | 99 | = | 99 × 1 ◀ |
| $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ | 3 | - | - | - | $10^1 \times 45^1$ | 1089 | = | 99 × 11 ◀ |
| $\psi_1\ \psi_2 \mid \psi_3\ \psi_4$ | 4 | 1 | 3 | 2 | | | | |
| 1 = | | | | | $10^1 \times 45^1$ | 10989 | = | 99 × 111 ◀ |
| 2 > ] | | | | | $10^0 \times 45^2$ | 10890 | = | 99 × 110 |
| 3 < ] | | | | | $10^0 \times 45^2$ | 9999 | = | 99 × 101 |
| $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5$ | 5 | 1 | 3 | 2 | | | | |
| 1 = | | | | | $10^2 \times 45^1$ | 109989 | = | 99 × 1111 ◀ |
| 2 > ] | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 109890 | = | 99 × 1110 |
| 3 < ] | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 99099 | = | 99 × 1001 |
| $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \mid \psi_4\ \psi_5\ \psi_6$ | 6 | 2 | 9 | 3 | | | | |
| 1 = = | | | | | $10^2 \times 45^1$ | 1099989 | = | 99 × 11111 ◀ |
| 2 > = | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 1099890 | = | 99 × 11110 |
| 3 = > ] | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 1098900 | = | 99 × 11100 |
| 4 > > ] | | | | | $10^0 \times 45^3$ | | | |
| 5 = < | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 1090089 | = | 99 × 11011 |
| 6 > < | | | | | $10^0 \times 45^3$ | 1089990 | = | 99 × 11010 |
| 7 < > | | | | | $10^0 \times 45^3$ | 999999 | = | 99 × 10101 |
| 8 < < | | | | | $10^0 \times 45^3$ | 991089 | = | 99 × 10011 |
| 9 < = | | | | | $10^1 \times 45^2$ | 990099 | = | 99 × 10001 |
| $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5\ \psi_6\ \psi_7$ | 7 | 2 | 9 | 3 | | | | |
| 1 = = | | | | | $10^3 \times 45^1$ | 10999989 | = | 99 × 111111 ◀ |
| 2 > = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 10999890 | = | 99 × 111110 |
| 3 = > ] | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 10998900 | = | 99 × 111100 |
| 4 > > ] | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | |
| 5 = < | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 10891089 | = | 99 × 110011 |
| 6 > < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 10890990 | = | 99 × 110010 |
| 7 < > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 10008999 | = | 99 × 101101 |
| 8 < < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 9901089 | = | 99 × 100011 |
| 9 < = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 9900099 | = | 99 × 100001 |

| | ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΟΡΘΙΟΙ | ν | n | Ψ Δ | ΟΜΙ | μ | Σ | = | 99 | × | f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5\ \psi_6\ \psi_7\ \psi_8$ | 8 | 3 | 27 | 4 | | | | | | |
| 1 | = = = | | | | | $10^3 \times 45^1$ | 109999989 | = | 99 | × | 1111111 ⇐ |
| 2 | > = = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 109999890 | = | 99 | × | 1111110 |
| 3 | = > = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 109998900 | = | 99 | × | 1111100 |
| 4 | > > = | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | | | |
| 5 | > > > | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 109989000 | = | 99 | × | 1111000 |
| 6 | = = > | | | | | $10^2 \times 45^2$ | | | | | |
| 7 | = > > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | | | |
| 8 | > = > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | | | |
| 9 | = = < | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 109900989 | = | 99 | × | 1110111 |
| 10 | > = < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 109900890 | = | 99 | × | 1110110 |
| 11 | > > < | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 109899900 | = | 99 | × | 1110100 |
| 12 | > < < | | | | | $10^0 \times 45^4$ | | | | | |
| 13 | = > < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | | | |
| 14 | = < > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 109000089 | = | 99 | × | 1101011 |
| 15 | > < > | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 108999990 | = | 99 | × | 1101010 |
| 16 | = < < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 108910989 | = | 99 | × | 1100111 |
| 17 | = < = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 108901089 | = | 99 | × | 1100011 |
| 18 | > < = | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 108900990 | = | 99 | × | 1100010 |
| 19 | < > = | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 100098999 | = | 99 | × | 1011101 |
| 20 | < > > | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 100089099 | = | 99 | × | 1011001 |
| 21 | < > < | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 99999999 | = | 99 | × | 1010101 |
| 22 | < < > | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 99100089 | = | 99 | × | 1001011 |
| 23 | < = > | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 99099099 | = | 99 | × | 1001001 |
| 24 | < < < | | | | | $10^0 \times 45^4$ | 99010989 | = | 99 | × | 1000111 |
| 25 | < = < | | | | | $10^1 \times 45^3$ | | | | | |
| 26 | < < = | | | | | $10^1 \times 45^3$ | 99001089 | = | 99 | × | 1000011 |
| 27 | < = = | | | | | $10^2 \times 45^2$ | 99000099 | = | 99 | × | 1000001 |

§54 Κ α ν ώ ν ἀμέσου ὑπολογισμοῦ τῆς στάθμης Σ διδομένου ὀρθίου ἀκεραίου, χωρίς τίς πράξεις ἀναστροφῆς (§46).

.1 Δίδεται 15-ψήφιος ὄρθιος ἀκέραιος C μέ τήν μορφή 15 ψηφιακῶν θέσεων ($\nu = 15$, $n = \frac{\nu-3}{2} = 6$). Κάτω ἀπό κάθε ψηφιακή θέση, ἀριστερά καί δεξιά, ἄς σχηματισθῆ τυχοῦσα διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (§22) (ἐκ τῶν $3^6$ δυνατῶν) :

$$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5\ \psi_6\ \psi_7\ \psi_8\ \psi_9\ \psi_{10}\ \psi_{11}\ \psi_{12}\ \psi_{13}\ \psi_{14}\ \psi_{15}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

> < = > < > = = < > < = > <

·2 Ἡ στάθμη Σ (§47) παντός ἀκεραίου εἶναι τό γινόμενο 99 × f, ὁ δέ παράγων f ἔχει πάντοτε ν-1 ψηφία (§50 ·14) (μηδενικά καί μονάδες), ὅσα εἶναι δηλ. τά μεσοδιαστήματα μεταξύ πρώτου καί τελευταίου ψηφίου $\phi_\nu$ τοῦ διδομένου ν-ψηφίου.

·3 Ἡ ν ο μ ο τ έ λ ε ι α πού ὑφίσταται μεταξύ συμβόλων καί ψηφίων τοῦ f ἔγκειται στό ἑξῆς : Κάθε ψηφίο τοῦ f πού περιέχεται μεταξύ τοῦ "στομίου" τοῦ συμβόλου < καί τῆς κορυφῆς ἤ τοῦ στομίου τοῦ συμβόλου > ,πρέπει νά σημαίνεται μέ τό ψηφίο 0, ἔστω καί ἄν μεταξύ < καί > παρεμβάλλεται ἕνα ἤ περισσότερα ἐν συνεχεία σύμβολα =.Δηλ. μόνο τό σύμβολο > (καί ὄχι τό = ) "ἀναχαιτίζει τήν μηδενιστική τάση " τοῦ < .

·4 Συνεπῶς, τόν διακριτικό ρόλο τῆς ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων 0 καί 1 στόν παράγοντα f ἀσκεῖ μόνο τό σύμβολο < .

·5 Γιαυτό, στόν πρῶτο ψηφιακό συνδυασμό (ἤ διάταξη) (§49 ·7) ἀπό τόν ὁποῖον ἀπουσιάζει σέ ὅλα τά ἐσωτερικά ψηφία τό σύμβολο < , ὁ f ἀποτελεῖται ἀπό συρμό μονάδων.

·6 Παράδειγμα : Δίδεται συγκεκριμένος 15-ψήφιος ὑπαγόμενος στήν ἐκλεγεῖσα διάταξη συμβόλων :

Μέ τόν Κανόνα τῆς §54 :

C = 8 7 2 4 1 6 5 9 | 5 1 4 2 2 8 0

>.<.=.>.<.>.=. | .=.<.>.<.=.>.<

f = 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1

14 = ν-1 ψηφία

Ἐπαλήθευση δι' ἀναστροφῆς :

| | | |
|---|---|---|
| − C | = | 872416595142280 |
| Ɔ | = | 082241595614278 |
| + D | = | 790174999528002 |
| ᗡ | = | 200825999471097 |
| Σ | = | 991000998999099 = 99·f = 99 × 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 |

ν = 15 ψηφία

# ΜΕΡΟΣ Β΄ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ' ΑΡΙΘΜΟΙ

## ΚΕΦ. 1 ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΟΙ

§55 Προτάσσονται ὁρισμένες ἐπεξηγήσεις ἐπί τῆς ψηφιακῆς δομῆς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν μέ σκοπό τήν πρόληψη ἐννοιλογικῶν παρερμηνειῶν κατά τήν ἀνάπτυξη τοῦ προκειμένου θέματος, μεταξύ αὐτῶν καί τῶν ἀκεραίων.

§56 Τό ἀκέραιο μέρος ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ χωρίζεται, ὡς γνωστόν, ἀπό τό δεκαδικό μέρος του, μέ τό κ ό μ μ α (ἤ, ἄλλως, ὑποδιαστολή).

§57 .1 Μία βασική διαφορά μεταξύ ἀκεραίων καί δεκαδικῶν ἀριθμῶν (θετικῶν) εἶναι πώς κάθε ψηφίο ν-ψηφίου ἀκεραίου νοεῖται ὡς γινόμενο τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ ψηφίου ἐπί μιά δύναμη τοῦ 10 μέ θ ε τ ι κ ό ἐκθέτη ὁ ὁποῖος ἀπό τό τελευταῖο ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ πρός τό πρῶτο, βαίνει αὐξανόμενος ἀπό τῆς τιμῆς μηδέν (0) μέχρι τῆς ν-1. Συνεπῶς ὁ ἀκέραιος π.χ. 867912 μπορεῖ νά ἐκφρασθῆ καί ὡς ἑξῆς :

$$867912 = 8\cdot10^5 + 6\cdot10^4 + 7\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 1\cdot10^1 + 2\cdot10^0$$

.2 Γιά τούς δεκαδικούς ὅμως, κάθε ψηφίο τοῦ μέν ἀκεραίου μέρους νοεῖται -ὅπως καί στούς ἀκεραίους ἀριθμούς- ὡς γινόμενο τῆς τιμῆς τοῦ ψηφίου ἐπί μιά δύναμη τοῦ 10 μέ θετικό ἐκθέτη πού ἀπό τό τελευταῖο ψηφίο (πρίν ἀπό τήν ὑποδιαστολή) πρός τό πρῶτο βαίνει αὐξανόμενος ἀπό τῆς τιμῆς 0, τοῦ δέ δεκαδικοῦ μέρους κάθε ψηφίο νοεῖται ὡς γινόμενο τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ ψηφίου ἐπί μιά δύναμη τοῦ 10 μέ ἀ ρ ν η τ ι κ ό ἐκθέτη πού, ἀπό τό ἀμέσως μετά τήν ὑποδιαστολή ψηφίο βαίνει ἐλαττούμενος ἀπό τοῦ -1 (καί ὄχι ἀπό τοῦ 0) μέχρι τῆς τιμῆς -k (ἐάν k εἶναι τό πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων). Συνεπῶς ὁ δεκαδικός ἀριθμός 867,912 μπορεῖ νά ἐκφρασθῆ καί ὡς

$$867,912 = 8\cdot10^2 + 6\cdot10^1 + 7\cdot10^0, + 9\cdot10^{-1} + 1\cdot10^{-2} + 2\cdot10^{-3}$$

.3 Στήν παραπάνω ἔκφραση τοῦ δεκαδικοῦ (867,912) πού ὅπως ἐδόθη ἔχει ἕξ ψηφία (3 τοῦ ἀκεραίου μέρους καί 3 τοῦ δεκαδικοῦ) δ έ ν ὑπάρχει συμμετρία δυνάμεων τοῦ 10 ὡς πρός τήν ὑποδιαστολή, ἡ ὁποία τοποθετεῖται μεταξύ τῆς $10^0$ καί τοῦ ἀμέσως μετ' αὐτήν συμβόλου + .

.4 Παρά τήν φαινομενική αὐτή ἀσυμφωνία ἔχει γίνει παραδεκτό ἀπό τῆς ἐποχῆς τοῦ Stevin (1548-1620) ὅτι τό κυριότερο γνώρισμα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ καθιέρωση τῆς γραφῆς τους σύμφωνα μέ τήν γραφή τῶν ἀκεραίων (ὄχι τήν ἐκθετική), καθιέρωση πού κάνει ὁμοιόμορφο τόν λογισμό.

§59 ·1 Γ ν ή σ ι ο ς δεκαδικός ἀριθμός ἄς κληθῆ ἐκεῖνος τοῦ ὁποίου τό μέν ἀκέραιο μέρος μπορεῖ νά εἶναι οἱοσδήποτε μονοψήφιος (καί τό 0) ἤ πολυψήφιος ἀκέραιος, ἀλλά πρό τῶν ψηφίων τούτων νά μή προηγεῖται ἄλλο ἤ ἄλλα ἐν συνεχεία μηδενικά, τό δέ δεκαδικό μέρος του νά εἶναι οἱοσδήποτε μονοψήφιος (ὄχι ὅμως τό 0) ἤ πολυψήφιος ἀκέραιος μή ἀκολουθούμενος ἀπό ἕνα ἤ περισσότερα ἐν συνεχεία μηδενικά.

·2 'Εάν τό δεκαδικό μέρος εἶναι τό 0,ὁ ἀριθμός δέν θεωρεῖται γνήσιος. Τότε ἡ ὑποδιαστολή περιττεύει καί ὁ διδόμενος μεταβάλλεται σέ ἰσότιμο ἀκέραιο (π.χ. 10,0 = 10).

§60 ·1 Π λ α σ τ ό ς δεκαδικός ἀριθμός ἄς κληθῆ ἐκεῖνος πού προέρχεται ἀπό γνήσιο(§59 ·1) στόν ὁποῖον γιά λόγους σκοπιμότητος (εἰδικοί λογαριασμοί, συγκριτικές ἀναγραφές, ἐμπορικές πράξεις κ.ἄ.), ἔχουν προστεθῆ μηδενικά εἴτε πρό τοῦ πρώτου ψηφίου ἤ μετά τό τελευταῖο ἤ καί ἀμφοτέρωθεν τοῦ γνησίου δεκαδικοῦ.

·2 Μετά τήν ἐνδεχόμενη προσθήκη αὐτῶν τῶν μηδενικῶν, ὁ ἀρχικός γνήσιος δεκαδικός μεταμορφώνεται σέ ἰσότιμο πλαστό. Καί ἀντιστρόφως, μετά τήν κατάλληλη ἀφαίρεση μηδενικῶν ἕνας πλαστός μπορεῖ νά μετατραπῆ σέ ἰσότιμο γνήσιο δεκαδικό (π.χ. εἶναι γνήσιοι οἱ 0,5 3,14 76,3
καί πλαστοί ἀλλ' ἰσότιμοι οἱ ........................ 0,500 03,14 076,30).

§61 ·1 Στήν παροῦσα πραγματεία ἐξετάζονται οἱ δεκαδικοί (θετικοί) ἀριθμοί τῶν ὁποίων τό δεκαδικό μέρος εἶναι γινόμενο ἑνός ξ-ψηφίου ἀκεραίου (μεγαλυτέρου ἀπό τό 0) ἐπί μιά δύναμη $10^{-\varphi}$, ἔνθα $|\varphi| \geqq |\xi|$.

·2 Μέ τήν παραδοχή αὐτή δέν εἰσάγονται στήν ἔρευνα περιοδικοί καί ἀσύμμετροι δεκαδικοί.

·3 Μ ο ν ο ψ ή φ ι ο ι δεκαδικοί ἀριθμοί, εἴτε γνήσιοι εἴτε πλαστοί δέν ὑπάρχουν.

§62 ·1 Γιά νά ὑπάρξει ἀπρόσκοπτη συνέχεια τῶν μέχρι τοῦδε σκέψεων καί εἰς τήν περιοχή τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, θά πρέπει νά καθιερωθῆ ἕνας τρόπος ἰσότιμης σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ῆ ς ἐμφανίσεως οἱουδήποτε δεκαδικοῦ [εἴτε γνήσιου εἴτε πλαστοῦ (§60 ·1 , §61 ·1)] ὅπως ἔχει γίνει στή συμμετρική γραφή τοῦ οἱουδήποτε ἀκεραίου (§12 & §13).

·2 'Ο τρόπος αὐτός ἔγκειται στήν προσθήκη (ἄν ἀπαιτηθῆ) τόσων μηδενικῶν, εἴτε πρό τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ ἀκεραίου μέρους ἑνός διδομένου δεκαδικοῦ,εἴτε μετά τό τελευταῖο ψηφίο τοῦ δεκαδικοῦ του μέρους, ὥστε ὁ

διδόμενος νά μεταβληθῆ σέ ἰσότιμο δεκαδικό μέ ἰσάριθμα ψηφία πρός τ' ἀριστερά καί πρός τά δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, ὑπό τόν ὅρον ὅμως νά μήν ὑπάρχει περίσσεια μηδενικῶν. Δηλ. ὁ δεκαδικός πού θά ὑποστῆ αὐτή τή μεταμόρφωση νά μήν ἀρχίζει καί νά μή τελειώνει σέ μηδέν.

(π.χ. ὁ διδόμενος γνήσιος δεκαδικός ............ 3,14159
μπορεῖ νά μορφοποιηθῆ στόν ἰσότιμο πλαστό ............ 00003,14159
εἴτε ὁ πλαστός ............ 3850,70
στόν ἕτερο ἰσότιμο πλαστό ............ 3850,70000).

•3 Ὁ δεκαδικός πού ἐξ ἀρχῆς δίδεται μέ ἰσοπληθῆ τά ἑκατέρωθεν τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία, εἴτε ὁ ἰσότιμος πρός αὐτόν ὁ κατόπιν προσθήκης ἑνός ἤ περισσοτέρων μηδενικῶν ἀποκτῶν αὐτήν τήν ἰσότητα ψηφίων, ἄς κληθῆ ἰ σ ο μ ε ρ ή ς (γνήσιος ἤ πλαστός).

•4 Ἐφεξῆς, κάθε δεκαδικός πού θά ὑπεισέρχεται στόν προκείμενο "λογισμό" θά μεταλλάσσεται (ἄν χρειάζεται) σέ ἰ σ ο μ ε ρ ῆ .

§63 •1 Μέ τήν κατ' αὐτό τόν τρόπο προσθήκη μηδενικῶν,ὁ διδόμενος δεκαδικός καθίσταται πάντοτε ἰσότιμος ἀ ρ τ ι ο ψ ή φ ι ο ς (§8) (ἐάν ἐξ ἀρχῆς δέν εἶναι), μέ κεντρικό σημεῖο (§12) τή θέση τῆς ὑποδιαστολῆς καί μέ κεντρικό ἄξονα (§13) διερχόμενο ἀπό τή θέση αὐτή.

•2 Ἐπομένως οἱ προηγούμενοι δεκαδικοί τῆς §62·2 : 3,14159 & 3850,70 καθίστανται ἰσομερεῖς : ὁ πρῶτος 10-ψήφιος καί ὁ ἄλλος 8-ψήφιος.

§64 Καθίσταται αὐτονόητο πώς μέ βάση τήν προηγούμενη παραδοχή δ έ ν ὑ π ά ρ χ ε ι π ε ρ ι τ τ ο ψ ή φ ι ο ς (§9) ἰσομερής δεκαδικός.

§65 Ἀποδεικνύεται χωρίς δυσκολία πώς τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ἰ σ ο μ ε ρ ῶ ν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (§62 ·3) εἶναι

$$10^{\nu} \qquad (\nu > 2)$$

§66 Ὄ ρ θ ι ο ς ἄς κληθῆ ὁ ν-ψήφιος ἰσομερής (§62 ·3) δεκαδικός ὁ ὁποῖος παρουσιάζει τό πρῶτο ψηφίο τοῦ ἀκεραίου μέρους του μεγαλύτερο ἀπό τό τελευταῖο τοῦ δεκαδικοῦ του μέρους (ὅπως π.χ. ὁ ἀρχικῶς γνήσιος ἰσομερής 80,75 ἤ ὁ καταστάς ἰσομερής πλαστός 367,010).

•1 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων (§63) ὀρθίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν εἶναι τά $\frac{45}{100}$ τοῦ ὅλου πλήθους $10^{\nu}$ τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν.

•2 Ἀπόδειξη : (ὅμοια μέ τήν τῆς §3 ·1, ·2, ·3, ·4). Ἔστω σέ γενική περίπτωση, πώς ἕνας ν-ψήφιος δεκαδικός παρίσταται μέ τή μορφή :

$$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \cdots\cdots \psi_{\frac{\nu}{2}}\ ,\ \psi_{\frac{\nu}{2}+1} \cdots\cdots \psi_{\nu-2}\ \psi_{\nu-1}\ \psi_{\nu}$$

(μορφή πού δέν ἐκφράζει συγκεκριμένη ἀριθμητική τιμή), μέ πρῶτο ψηφίο τοῦ ἀκεραίου μέρους του τό $\phi_1$. Καθένα ἀπό τά ἐσωτερικά του ψηφία (§71) $\phi_2, \phi_3, \dots \phi_{\nu-2}, \phi_{\nu-1}$ μπορεῖ νά προσλάβει τιμή 0, 1, 2, 3, ............ , 8, 9.

•3 Οἱ θέσεις πού καταλαμβάνουν ὅλα τά ἐσωτερικά ψηφία ἑνός ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ (§62 •3) ἔχουν πλῆθος ν-2 .

•4 Ἐπειδή κάθε τιμή ἀπό τίς 10 δυνατές τιμές πού μπορεῖ νά πάρει ἕνα ἐσωτερικό ψηφίο εἶναι δυνατό ν' ἀντιστοιχίσει σέ κάθε τιμή ἀπό τίς 10 κάθε ἄλλου ἐσωτερικοῦ φ, τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων πού μπορεῖ νά ἐμφανίσει ὁ δοθείς ν-ψήφιος δεκαδικός εἶναι $10^{\nu-2}$.

•5 Ἐπί πλέον, ἐάν ὁ δοθείς εἶναι, ὡς ὑπετέθη, ὄρθιος (§66) θά πρέπει

$$\phi_1 > \phi_\nu$$

Τότε τό $\phi_1$ μπορεῖ νά παίρνει τιμές ἀπό 1 ἕως 9 (9 τιμές), ἐνῶ τό $\phi_\nu$ ἀπό 0 ἕως 8 (9 τιμές). Ἔτσι σέ κάθε τιμή τοῦ $\phi_1$ πρέπει ν' ἀντιστοιχῆ μιά μικρότερη της τιμή τοῦ $\phi_\nu$, σύμφωνα μέ τήν ἑξῆς ἐποπτική παράσταση:

| $\phi_1$ | $\phi_2$ | | $\phi_{\frac{\nu}{2}}$ | $\phi_{\frac{\nu}{2}+1}$ | | $\phi_{\nu-1}$ | $\phi_\nu$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 9 | | 9 | 9 | | 9 | | |
| 8 | 8 | | 8 | 8 | | 8 | 0,1, ……… ,8 | |
| 7 | 7 | | 7 | 7 | | 7 | 0,1, ……… ,7 | |
| 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 0,1, ……… ,6 | |
| 5 | 5 | ………………… | 5 | 5 | ………………… | 5 | 0,1,………,5 | |
| 4 | 4 | | 4 | 4 | | 4 | 0,1,2,3,4 | |
| 3 | 3 | | 3 | 3 | | 3 | 0,1,2,3 | (ν>2) |
| 2 | 2 | | 2 | 2 | | 2 | 0,1,2 | ν ἄρτιος |
| 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | 0,1 | |
| — | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | Σύνολο τιμῶν |
| 9 | 10 | | 10 | 10 | | 10 | 45 | ← ἕως |

•6 Ἀπό τήν παράσταση αὐτή προκύπτει ὅτι μέ τόν συνδυασμό τῆς κάθε μιᾶς ἀπό τίς 9 τιμές τοῦ $\phi_1$ μέ κάθε μικρότερη της ἀπό τίς 45 τιμές τοῦ $\phi_\nu$ καί ἀκόμη, μέ τόν συνδυασμό της ἀλλεπαλλήλως μέ κάθε μιά ἐκ τῶν 10 τιμῶν (§66 •4) τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων $\phi_2, \phi_3, \dots\dots, \phi_{\nu-2}, \phi_{\nu-1}$, παρέχεται συνολικό πλῆθος ὀρθίων ἰσομερῶν ν-ψηφίων δεκαδικῶν ἴσο μέ :

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \times 10^{\nu-2} = 45 \times 10^{\nu-2}$$

•7 Ἄρα, ὁ λόγος τοῦ πλήθους τῶν ν-ψηφίων ὀ ρ θ ί ω ν ἰσομερῶν πρός τό συνολικό πλῆθος $10^\nu$ τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν εἶναι

$$\frac{45 \times 10^{\nu-2}}{10^\nu} = \frac{45}{100}$$

§67 ·1 Ἰ σ ο σ κ ε λ ή ς ἄς κληθῆ ὁ ἰσομερής ν-ψήφιος (§63) δεκαδικός ὁ ὁποῖος ὅταν ἐξ ἀρχῆς δίδεται ὡς ἰσομερής (§62 ·3) παρουσιάζει τό πρῶτο ψηφίο τοῦ ἀκεραίου μέρους του ἴδιο μέ τό [τελευταῖο] ψηφίο τοῦ δεκαδικοῦ μέρους του (ὅπως π.χ. ὁ ἀρχικῶς γνήσιος ἰσομερής 80,78).

·2 Ἄς σημειωθῆ ὅτι ὅταν δίδεται ν-ψήφιος δεκαδικός γνήσιος (§59) μή ὅμως ἰσομερής (§62 ·3), αὐτός δέν μπορεῖ νά γίνει μέ τήν προσθήκη ἑνός μόνο μηδενικοῦ ἰσομερής ἰσοσκελής, ἀλλά μέ τήν προσθήκη περισσοτέρων τοῦ ἑνός μηδενικῶν (π.χ. οἱ ἀρχικῶς γνήσιοι μή ἰσομερεῖς καί μή ἰσοσκελεῖς ........................................ 5,174 175,35
γίνονται ἰσότιμοι ἰσομερεῖς ἰσοσκελεῖς ὡς ἑξῆς : 0005,1740 0175,3500
δηλ. μέ τήν προσθήκη πλέον τοῦ ἑνός μηδενικῶν στόν καθένα).

§68 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ἰσοσκελῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι τά $\frac{10}{100}$ τοῦ ὅλου πλήθους $10^{\nu}$ (§65) τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν (π.χ. οἱ διψήφιοι, ὅπως ὁ 3,3 εἶναι $10^{\nu-1} = 10$, οἱ τετραψήφιοι, ὅπως ὁ 32,93 εἶναι $10^{\nu-1} = 1000$). Διότι :

·1 Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἀπόδειξη (§66 ·4), τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων πού μπορεῖ νά ἐμφανίσει ἀλλεπάλληλα ἕνας διδόμενος ν-ψήφιος δεκαδικός μέ τή μορφή $\psi_1\ \psi_2$ ....... , ....... $\psi_{\nu-1}\ \psi_\nu$ ἡ ὁποία μορφή, ὡς ἐλέχθη (§3 ·1), δέν ἐκφράζει συγκεκριμένη ἀριθμητική τιμή, ἀνέρχεται σέ $10^{\nu-2}$ .

·2 Ἄν ὁ διδόμενος ἰσομερής δεκαδικός εἶναι ἰσοσκελής (§67 ·1) πρέπει $\psi_1 = \psi_\nu$ , ὅπου τό $\psi_1$ καί τό $\psi_\nu$ πρέπει νά παίρνουν συγχρόνως τήν ἴδια τιμή ἀπό 0 ἕως 9.

·3 Τότε, τό πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν τιμῶν πού μπορεῖ νά πάρει τό $\psi_1$ καί συγχρόνως τό $\psi_\nu$ σέ συνδυασμό πρός ἄλληλα, δέν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δηλ. ὁ ἀριθμός 45, ὅπως συμβαίνει στούς ὀρθίους ἰσομερεῖς δεκαδικούς (§66 ·6), ἀλλ' εἶναι τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀπό 0 ἕως 9, δηλ. ὁ ἀριθμός 10.

·4 Συνεπῶς, τό πλῆθος ὅλων τῶν ἰσοσκελῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι $10 \times 10^{\nu-2} = 10^{\nu-1}$ .

·5 Ὁ λόγος ἄρα τοῦ πλήθους τῶν ν-ψηφίων ἰσοσκελῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν ὡς πρός τό συνολικό πλῆθος $10^{\nu}$ τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν :

$$\frac{10^{\nu-1}}{10^{\nu}} = \frac{10}{100}$$

§69 Ὑ π ο τ ε λ ή ς ἄς κληθῆ ὁ ἰσομερής (§62 ·2) ν-ψήφιος (§63) δεκαδικός ὅστις, ὅταν ἐξ ἀρχῆς δίδεται ὡς ἰσομερής ἤ ὅταν καθίσταται ἰσομερής (§62 ·4) παρουσιάζει τό πρῶτο ψηφίο τοῦ ἀκεραίου μέρους του μικρότερο τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ δεκαδικοῦ μέρους (π.χ. ὅπως ὁ γνήσιος ἰσομερής 31,24 καί ὁ πλαστός ἰσομερής 029,756).

§70 Τό πλῆθος τῶν ν-ψηφίων ὑποτελῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν εἶναι τά $\frac{45}{100}$ τοῦ ὅλου πλήθους $10^{\nu}$ (§65) τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν.

·1 Οἱ ν-ψήφιοι ἄρα ὄρθιοι ἰσομερεῖς καί οἱ ν-ψήφιοι ὑποτελεῖς ἰσομερεῖς εἶναι ἰσάριθμοι [πράγμα πού δέν συμβαίνει στούς ἀκεραίους (βλ. §3 & §7)].

·2 Ἀπόδειξη : Σύμφωνα μέ τήν ἀπόδειξη τῆς §66 ·4, τό πλῆθος τῶν μονοψηφίων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων πού μπορεῖ νά ἐμφανίσει ἀλλεπάλληλα ἕνας διδόμενος ν-ψήφιος δεκαδικός μέ τή μορφή

$$\phi_1 \phi_2 \cdots\cdots , \cdots\cdots \phi_{\nu-1} \phi_{\nu}$$

ἡ ὁποία μορφή, ὡς ἐλέχθη (§3 ·1), δέν ἐκφράζει συγκεκριμένη ἀριθμητική τιμή, ἀνέρχεται σέ $10^{\nu-2}$

·3 Ἄν ὁ διδόμενος ἰσομερής δεκαδικός εἶναι ὑποτελής (§69), πρέπει

$$\phi_1 < \phi_{\nu}$$

ὅπου τό $\phi_1$ παίρνει τιμές ἀπό 0 ἕως 8 (9 τιμές) ἐνῶ τό $\phi_{\nu}$ ἀπό 1 ἕως 9 (9 τιμές). Ἔτσι σέ κάθε τιμή τοῦ $\phi_{\nu}$ πρέπει ν' ἀντιστοιχῆ μιά μικρότερη της τιμή τοῦ $\phi_1$, σύμφωνα μέ τήν ἑξῆς ἐποπτική παράσταση :

$(\phi_1 < \phi_{\nu})$

| | $\phi_1$ | $\phi_2$ | ......,...... | $\phi_{\nu-1}$ | $\phi_{\nu}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 9 | | 9 | 9 |
| | 7 | 8 | | 8 | 8,9 |
| | 6 | 7 | | 7 | 7,8,9 |
| | 5 | 6 | | 6 | 6,7,8,9 |
| | 4 | 5 | | 5 | 5,6,7,8,9 |
| | 3 | 4 | | 4 | 4,5,6,7,8,9 |
| | 2 | 3 | | 3 | 3,4,5,6,7,8,9 |
| | 1 | 2 | | 2 | 2,3,4,5,6,7,8,9 |
| | 0 | 1 | | 1 | 1,2,3,4,5,6,7,8,9 |
| | | 0 | | 0 | |
| Σύνολο τιμῶν ἕως ⟶ | 9 | 10 | | 10 | 45 |

·4 Τό ἄθροισμα ἑπομένως ὅλων τῶν δυνατῶν τιμῶν ἀπό 0 ἕως 8 πού μπορεῖ νά πάρει τό $\phi_1$ εἶναι

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

καί τό πλῆθος ὅλων τῶν τιμῶν τίς ὁποῖες μποροῦν νά πάρουν ὅλα τά ψηφία φ, δηλ. τό πλῆθος ὅλων τῶν ὑποτελῶν ἰσομερῶν ν-ψηφίων δεκαδικῶν εἶναι :

$$45 \times 10^{\nu-2}$$

•5 Συνεπῶς ὁ λόγος τοῦ πλήθους τῶν ὑποτελῶν ἰσομερῶν ν-ψηφίων δεκαδικῶν ὡς πρός τό συνολικό πλῆθος $10^{\nu}$ (§65) τῶν ν-ψηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν εἶναι

$$\frac{45 \times 10^{\nu-2}}{10^{\nu}} = \frac{45}{100}$$

§71 Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ά ψηφία ἑνός ν-ψηφίου ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ ἄς κληθοῦν ἐκεῖνα πού περιέχονται μεταξύ τῶν ἀκραίων ψηφίων του (π.χ. τοῦ 352,760 εἶναι τά 5,2,7,6). Τό πλῆθος τους εἶναι, ὡς ἐλέχθη (§66), ν-2.

§72 Ἀ ρ ι σ τ ε ρ ά ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ά ψηφία ἑνός ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ ν-ψηφίου εἶναι τά περιεχόμενα μεταξύ τοῦ πρώτου ψηφίου (τοῦ ἀκεραίου τμήματος) καί τῆς ὑποδιαστολῆς (π.χ. στόν ἰσομερῆ 352,760 εἶναι τά 5 καί 2).

§73 •1 Δ ε ξ ι ά ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ά ψηφία ἑνός ἰσομεροῦς ν-ψηφίου δεκαδικοῦ εἶναι τά περιεχόμενα μεταξύ τῆς ὑποδιαστολῆς καί τοῦ τελευταίου ψηφίου (τοῦ δεκαδικοῦ μέρους) (π.χ. στόν 352,760 εἶναι τά 7 & 6).

•2 Βάσει τῶν προηγουμένων (§62 •3), τά ἀριστερά εἶναι ἰσοπληθῆ μέ τά δεξιά ἐσωτερικά ψηφία.

§74 Τό πλῆθος n τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους ἑνός ἰσομεροῦς ν-ψηφίου δεκαδικοῦ (ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν τοῦ δεκαδικοῦ του μέρους) εἶναι

$$n = \frac{\nu-2}{2}$$

## ΚΕΦ. 2 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΕΝΟΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ

§75 Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ά (κατά θέσιν) ἄς κληθοῦν δύο ψηφία ἑνός ν-ψηφίου ($\nu > 2$) ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ (§62 •3) τά ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν καί σέ ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τήν ὑποδιαστολή (§56).

•1 Ὡς παράδειγμα δίδεται ὁ τυχών δεκαδικός

72416,319

πού ἀφοῦ μετατραπῆ σέ ἰσότιμο ἰσομερῆ, θεωρεῖται ὄρθιος 10-ψήφιος :

72416,31900

•2 Ἔτσι, τό πρῶτο του ψηφίο (τό 7) εἶναι "κατά θέσιν" συμμετρικό πρός τό τελευταῖο του (τό 0), τό δεύτερο ψηφίο (τό 2) πρός τό προτελευταῖο (τό 0), τό τρίτο (τό 4) πρός τό 9 κ.ο.κ.

§76 Τά τρία σύμβολα συγκρίσεως, δηλ. τό ἕνα τῆς ἰσότητος (=) καί τά δύο τῆς ὑπεροχῆς (>, <, §20 ·1) πού ἀφοροῦν στά συμμετρικά ψηφία ἑνός ἀκεραίου, ἔχουν τήν ἴδια ἔννοια ὑποστάσεως καί λειτουργίας γιά τά συμμετρικά ψηφία ἑνός δεκαδικοῦ.

§77 Συνεπῶς σέ τυχόντα ν-ψήφιο ἰσομερῆ δεκαδικό (ν>2), κάθε ἐσωτερικό ψηφίο τοῦ ἀκεραίου μέρους του μπορεῖ νά εἶναι ἴσο ἤ μεγαλύτερο ἤ μικρότερο τοῦ συμμετρικοῦ του (§75).

§78 ·1 Στόν παραπάνω δεκαδικό τῆς §75 ·1 ἄς τοποθετηθοῦν ἐνδεικτικά, πάνω ἀπό τά ψηφία του τά τρία σύμβολα συγκρίσεως καί κάτω ἀπό αὐτά οἱ ψηφιακές θέσεις $\psi_1$, $\psi_2$, ...................... $\psi_\nu$ :

> > < = >  < = > < <
7 2 4 1 6, 3 1 9 0 0

$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5,\ \psi_6\ \psi_7\ \psi_8\ \psi_9\ \psi_{10}$

·2 Ἐφ' ὅσον ὅμως ἀπό τήν μέχρι τοῦδε ἀνάπτυξη ἔγινε κατανοητός ὁ λόγος ὑπάρξεως τῶν συμβόλων καί τῶν τροχιῶν, ἡ παράσταση τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μπορεῖ ἀπό δῶ καί πέρα ν' ἁπλοποιηθῆ ὡς ἑξῆς :

> < = >
7 2 4 1 6, 3 1 9 0 0 $(\nu = 10,\quad n = \frac{10-2}{2} = 4)$
n

## ΚΕΦ. 3 ΟΙ ΨΗΦΙΑΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

§79 Κάθε ν-ψήφιος ἰσομερής (§62 ·3) δεκαδικός ἀριθμός (ν > 2) ἀνταποκρίνεται σ' ἕνα καί μόνο συνδυασμό -ἤ ὀρθότερα- διάταξη, ἀπό τίς $3^n$ δυνατές πού μποροῦν ν' ἀναπτυχθοῦν ἐπί τῶν n ἐσωτερικῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἐνῶ σ' ἕνα διδόμενο συνδυασμό (διάταξη) ἀντιστοιχοῦν πολλοί ν-ψήφιοι δεκαδικοί, ὅπως ἀποδεικνύεται παρακάτω (βλ. καί §26).

§80 Δοθέντος ἑνός ν-ψηφίου ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (ν ≧4) μέ τήν ψηφιακή μορφή $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3$ ..........., ........... $\psi_{\nu-2}\,\psi_{\nu-1}\,\psi_\nu$
θά πρέπει νά δοθοῦν ἀπαντήσεις στά ἑξῆς δύο ἐρωτήματα (βλ. καί §27) :

·1 Κατά πόσους τρόπους μποροῦν νά διαταχθοῦν "μετ' ἐπαναλήψεως" σύμβολα συγκρίσεως (=, >, <) στίς n θέσεις τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς διδομένης δεκαδικῆς μορφῆς.

·2 Πόσοι ἀπό τούς $10^\nu$ (§65) ν-ψηφίους ἰσομερεῖς δεκαδικούς ἀντιστοιχοῦν χωριστά σέ κάθε διάταξη συμβόλων, ὅταν κάθε ψ

ἀντικαθίστανται ἀλληλοδιαδόχως -σ' αὐτή τήν διάταξη- μέ ἀριθμητικές τιμές ἀπό 0 ἕως 9.

§81 'Η ἀπάντηση στό πρῶτο ἐρώτημα εἶναι ἡ αὐτή μ' ἐκείνη τῆς §28, δηλ.

$$^{R}\mathbf{A}^{n}_{m=3} = m^{n} = 3^{n}$$

διότι ὁ "λογισμός" ἐπί ἀκεραίων καί δεκαδικῶν αἰτιολογεῖται ὡς ὁμοιόμορφος (§57 ·4).

·1 Παραδείγματα : Δίδονται οἱ φηφιακές μορφές δύο ἰσομερῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἑνός 4-φηφίου καί ἑνός 6-φηφίου, ἐπί τῶν φηφίων τῶν ὁποίων σημειώνονται οἱ "μετ' ἐπαναλήψεως διατάξεις" τῶν συμβόλων συγκρίσεως :

| | $\phi_1\phi_2 , \phi_3\phi_4$ |
|---|---|
| 1 | = |
| 2 | > |
| 3 | < |

$\nu = 4$ φηφία $\quad n = \frac{\nu-2}{2} = 1$

$^{R}A^{n=1}_{m=3} = 3^{1} = 3$ διατάξεις

| | $\phi_1\phi_2\phi_3 , \phi_4\phi_5\phi_6$ |
|---|---|
| 1 | = = |
| 2 | = > |
| 3 | = < |
| 4 | > = |
| 5 | < = |
| 6 | > > |
| 7 | < < |
| 8 | > < |
| 9 | < > |

$\nu = 6$ φηφία $\quad n = \frac{\nu-2}{2} = 2$

$^{R}A^{n=2}_{m=3} = 3^{2} = 9$ διατάξεις

§82 ·1 'Η ἀπάντηση στό δεύτερο ἐρώτημα (§80) δίδεται ἀπό τό ἑξῆς θεώρημα τοῦ ὁποίου ἡ διατύπωση καί ἡ ἀπόδειξη εἶναι ὅμοιες μέ τίς ἀναφερόμενες στίς §29 καί §30, σύμφωνα μέ τά λεχθέντα στήν §57. Δηλ. :

·2 Θ ε ώ ρ η μ α . 'Από τό σύνολο $10^{\nu}$ τῶν ν-φηφίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐξ ἀρχῆς ὡς ἰσομερῶν ἤ καταστάντων ἰσομερῶν (§62) , τό ὑποσύνολο μ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται σέ μιά ἀπό τίς $3^{n}$ διδόμενη διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (§76), παρέχεται ἀπό τόν τύπο

[5] $$\mu = 10^{p} \times 45^{n-p} \times 10^{a} \times 45^{b} \times 45^{c}$$ ἔνθα :

p τό πλῆθος τῶν συμβόλων ἰσότητος (=) τά ὁποῖα ἐνδέχεται νά ὑπάρχουν στήν περιοχή τῶν ὡς ἄνω n φηφίων.

$a = 1$ μέ $b = c = 0$ (ἰσοσκελεῖς ἰσομερεῖς)
$b = 1$ μέ $a = c = 0$ (ὑποτελεῖς ἰσομερεῖς)
$c = 1$ μέ $a = b = 0$ (ὄρθιοι ἰσομερεῖς)

§83 <u>'Απόδειξη</u> τοῦ θεωρήματος τῆς §82 ·2 :

·1 Ἔστω ἰσομερής (§62 ·3) δεκαδικός ὄ ρ θ ι ο ς μέ ν =10 ψηφία, ὑπό τήν μορφή

$$\psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4\,\psi_5\,,\psi_6\,\psi_7\,\psi_8\,\psi_9\,\psi_{10}$$

(μορφή πού δέν ἐκφράζει ἀριθμητική τιμή). Τό πλῆθος $n$ τῶν ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων του (δηλ. τοῦ ἀκεραίου μέρους του) εἶναι $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$ .

·2 Ἔστω ἀκόμη πώς αὐτά τά $n$ ψηφία του ($\psi_2$ ,$\psi_3$ ,$\psi_4$ ,$\psi_5$ ) διέπονται ἀπό τήν ἑξῆς τυχοῦσα διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (μετ' ἐπαναλήψεως) :

$$\begin{matrix} > = > = < \\ \psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4\,\psi_5\,,\,\psi_6\,\psi_7\,\psi_8\,\psi_9\,\psi_{10}\end{matrix}$$

Δηλ. $\psi_1 > \psi_{10}$ $\psi_2 = \psi_9$ $\psi_3 > \psi_8$ $\psi_4 = \psi_7$ $\psi_5 < \psi_6$

'Η διάταξη αὐτή συνδέεται μέ τήν ἑξῆς ἐποπτική παράσταση :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 9 | 9 | 9 | 0,1,....8 | 9 | 9 | 0,1,....8 | 9 | 0,1,....8 | |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 0,1,....7 | 8 | 8 | 0,1,....7 | 8 | 0,1,....7 | |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 0,1,....6 | 7 | 7 | 0,1,....6 | 7 | 0,1,....6 | |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 0,1,....5 | 6 | 6 | 0,1,....5 | 6 | 0,1,....5 | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | | 5 | 5 | | 5 | | |
| > | = | > | = | < | > | = | < | = | < | |
| $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $\psi_5$ , | $\psi_6$ | $\psi_7$ | $\psi_8$ | $\psi_9$ | $\psi_{10}$ | |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 0,1,....4 | 4 | 4 | 0,1,....4 | 4 | 0,1,....4 | |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 0,1,2,3 | 3 | 3 | 0,1,2,3 | 3 | 0,1,2,3 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 0,1,2 | 2 | 2 | 0,1,2 | 2 | 0,1,2 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0,1 | 1 | 1 | 0,1 | 1 | 0,1 | Σύνολο |
| | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | τιμῶν |
| 9 | 10 | 9 . | 10 | 45 | 9 | 10 | 45 | 10 | 45 | ← ἕως |

·3 Κάθε μία ἀπό τίς 10 δυνατές τιμές (ἀπό 0 ἕως 9) καθενός ἀπό τά ἐσωτερικά ψηφία πού ἔτυχε νά εἶναι ἴσο πρός τό συμμετρικό του (δηλ. ἐδῶ τό $\psi_2$ καί τό $\psi_4$), μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ μιά ἴση πρός αὐτό τιμή τοῦ συμμετρικοῦ τούτου ψηφίου (ἐδῶ τοῦ $\psi_9$ καί τοῦ $\psi_7$ ἀντιστοίχως). Ἔτσι, τό μέγιστο πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν γιά κάθε τέτοιο ζεῦγος ἴσων ψηφίων πρέπει ν' ἀνέρχεται σέ 10. Ἄρα γιά πλῆθος $p$ ζευγῶν ἴσων ἐσωτερικῶν ψηφίων, τό πλῆθος τῶν συνολικῶν συνδυασμῶν γι' αὐτά εἶναι $10^p$ .

·4 'Επίσης, γιά κάθε μία ἀπό τίς 9 δυνατές τιμές (ἀπό 1 ἕως 9)καθενός ἀπό τά ἐσωτερικά ψηφία πού ἔτυχε νά εἶναι μεγαλύτερο τοῦ συμμετρικοῦ του (ἐδῶ τοῦ $\psi_3$ καί τοῦ $\psi_6$ ) μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ κάθε μία ἀπό τίς μικρότερες της τιμές αὐτοῦ τοῦ συμμετρικοῦ ψηφίου (ἐδῶ τοῦ $\psi_8$ καί τοῦ $\psi_5$ ἀντιστοίχως). Ἔτσι τό μέγιστο πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν γιά κάθε τέτοιο ζεῦγος ἀνίσων ψηφίων, πρέπει ν' ἀνέρχεται σέ :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Ἄρα γιά πλῆθος n−p ζευγῶν ἀνίσων ἐσωτερικῶν ψηφίων, τό πλῆθος τῶν συνολικῶν συνδυασμῶν γι' αὐτά εἶναι ἴσο μέ $45^{n-p}$

•5 Σέ ὄ ρ θ ι ο ἰσομερῆ δεκαδικό (§66 & §62 •3) ὅπως στόν δοθέντα στόν ὁποῖον $\phi_1 > \phi_{10}$, προκύπτει μέ ὅμοιες σκέψεις, πώς κάθε μία ἀπό τίς 9 δυνατές τιμές (ἀπό 1 ἕως 9) τοῦ $\phi_1$ μπορεῖ νά συνδυάσθῆ μέ κάθε μικρότερη της τιμή τοῦ $\phi_{10}$ (ἀπό 0 ἕως 8).
Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τιμῶν μεταξύ $\phi_1$ καί $\phi_{10}$, ἀνέρχεται σέ :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

ὅπως ἐξηγήθηκε προηγουμένως.
Ἄρα γιά ὄρθιο ἰσομερῆ δεκαδικό παρουσιάζεται ἀκόμη −γιά τά $\phi_1$ καί $\phi_{10}$ − ἕνας παράγων $45^1$ ἤ, πειό σωστά, $45^c$ (c = 1 ὅπως ἐξηγεῖται παρακάτω ).

•6 Σέ ὑ π ο τ ε λ ῆ ἰσομερῆ δεκαδικό (§69, §62 •3) στόν ὁποῖον

$$\phi_1 < \phi_{10}$$

προκύπτει μέ παρόμοιες σκέψεις ὅτι κάθε μία ἐκ τῶν 9 δυνατῶν τιμῶν τοῦ $\phi_1$ [ἀπό 0 ἕως 8 καί ὄχι 8 τιμῶν ἀπό 1 ἕως 8 ὅπως συμβαίνει στούς ἀκεραίους(§32 •6), δεδομένου ὅτι ἕνας δεκαδικός νοεῖται ν' ἀρχίζει ἀπό τό μηδέν, ἐνῶ δέν νοεῖται ἀκέραιος μέ πρῶτο ψηφίο τό 0], μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ κάθε μεγαλύτερη της τιμή τοῦ $\phi_{10}$. Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τούτων μεταξύ $\phi_1$ καί $\phi_{10}$ ἀνέρχεται σέ :

$$1 + 2 + \dots\dots + 9 = 45$$

(καί ὄχι σέ $1 + 2 + \dots\dots + 8 = 36$, ὅπως στούς ἀκεραίους).
Ἄρα γιά ὑποτελῆ ἰσομερῆ δεκαδικό παρουσιάζεται ἀκόμη, γιά τά ψηφία $\phi_1$ καί $\phi_{10}$, ἕνας παράγων $45^1$ ἤ, πειό σωστά, $45^b$ (b = 1, ὅπως ἐξηγεῖται παρακάτω).

•7 Σέ ἰ σ ο σ κ ε λ ῆ ἰσομερῆ δεκαδικό (§67, §62 •3) στόν ὁποῖον

$$\phi_1 = \phi_{10}$$

προκύπτει ὁμοίως ὅτι κάθε μία ἀπό τίς 10 δυνατές τιμές τοῦ $\phi_1$ (ἀπό 0 ἕως 9, διότι ἔχει νόημα νά παρουσιάζεται ἕνας ἰσομερής δεκαδικός ἀριθμός ἔχων καί τό πρῶτο καί τό τελευταῖο του ψηφίο ἴσο μέ 0), μπορεῖ νά συνδυασθῆ μέ μία ἴση πρός αὐτήν τιμή τοῦ $\phi_{10}$.
Ἔτσι, τό μέγιστο πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν γιά τά $\phi_1$ καί $\phi_{10}$, ἀνέρχεται σέ 10.
Ἄρα, γιά ἰσοσκελῆ ἰσομερῆ δεκαδικό παρουσιάζεται ἀκόμη,γιά τά $\phi_1$ καί

$\phi_{10}$ , ἕνας παράγων $10^1$ ἤ, σωστότερα, $10^a$ ($a$ =1,ὅπως ἐξηγεῖται παρακάτω).

•8 Κατόπιν τῶν προηγουμένων, τό σύνολο τῶν συνδυασμῶν (διατάξεων) τῶν δυνατῶν τιμῶν (καθένας τῶν ὁποίων συνδυασμῶν δίδει καί ἀπό ἕνα ν-ψήφιο ἰσομερῆ δεκαδικό) μεταξύ τῶν $10^p$, $45^{n-p}$, $10^a$, $45^b$, $45^c$ ἐπί μέρους συνδυασμῶν, εἶναι

$$\mu \;=\; 10^p \times 45^{n-p} \times 10^a \times 45^b \times 45^c$$

δηλ. τό ἐξαγόμενο τοῦ τύπου τῆς §82 •2 .

§84 Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

Προσαρμόζονται πρός τ' ἀνωτέρω ἀναπτυχθέντα, ὀλίγα παραδείγματα ὅμοια τῶν ὁποίων ἔχουν δοθῆ στήν §31 :

•1 Δίδεται ὁ 10-ψήφιος ὄ ρ θ ι ο ς δεκαδικός πού ἔχει καταστῆ ἰσομερής, ἄρα καί ἀρτιοψήφιος, μέ τήν προσθήκη τοῦ τελικοῦ μηδέν (0) :

>
7 6 3 4 5 , 5 2 3 9 0    $\nu$ = 10  $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$
< = > =

Τό πλῆθος τῶν 10-ψηφίων ὀρθίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν, μέ τήν ἐμφαινόμενη διάταξη συμβόλων συγκρίσεως, μέσα στό συνολικό πλῆθος $10^\nu$ τῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν εἶναι

$$\mu \;=\; 10^p \times 45^{n-p} \times 10^a \times 45^b \times 45^c$$

p = 2  n−p = 2
a = b =0  c = 1

$\mu \;=\; 10^2 \times 45^3 \;=$ .................................. 9112500

•2 Δίδεται ὁ 10-ψήφιος ὑ π ο τ ε λ ή ς δεκαδικός πού ἔχει καταστῆ ἰσομερής, ἄρα καί ἀρτιοψήφιος, μέ τήν προσθήκη τῶν δύο ἀρχικῶν 0 :

<
0 0 3 4 5 , 5 2 3 9 7    $\nu$ = 10  $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$
< = > =

Τό πλῆθος τῶν 10-ψηφίων ὑποτελῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν μέ τήν ἐμφαινόμενη διάταξη συμβόλων συγκρίσεως, μέσα στό συνολικό πλῆθος $10^\nu$ τῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν εἶναι

$$\mu \;=\; 10^p \times 45^{n-p} \times 10^a \times 45^b \times 45^c$$

p = 2  n−p = 2
a = c =0  b = 1

$\mu \;=\; 10^2 \times 45^3 \;=$ .................................. 9112500

•3 Δίδεται ὁ 10-ψήφιος ἰ σ ο σ κ ε λ ή ς δεκαδικός, πού ἐξ ἀρχῆς ἐδόθη ἰσομερής ἰσοσκελής :

=
3 6 3 4 5 , 5 2 3 9 3    $\nu$ = 10  $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$
< = > =

Τό πλῆθος τῶν 10-ψηφίων ἰσοσκελῶν ἰσομερῶν δεκαδικῶν μέ τήν εἰκονιζόμενη

διάταξη συμβόλων συγκρίσεως, μέσα στό γενικό πλῆθος $10^{v}$, εἶναι

$$\mu = 10^{p} \times 45^{n-p} \times 10^{a} \times 45^{b} \times 45^{c}$$

p = 2  n − p = 2
b = c = 0  a = 1

$$\mu = 10^{3} \times 45^{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2025000$$

## ΚΕΦ. 4  ΟΙ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

§85 Ὁ τύπος $\mu = 10^{p} \times 45^{n-p} \times 10^{a} \times 45^{b} \times 45^{c}$ (§82), δίδει ὡς ἐλέχθη ἕνα ὑποσύνολο ν-ψηφίων δεκαδικῶν οἵτινες εἴτε ἀπ' ἀρχῆς δίδονται ἰσομερεῖς (§62 ·3) [ ὄρθιοι, ἰσοσκελεῖς, ὑποτελεῖς (§66, §67, §69) ], εἴτε καθίστανται ἰσότιμοι ἰσομερεῖς (ἐπομένως πάντοτε ἀρτιοψήφιοι) διά προσθήκης μηδενικῶν καί οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται σ' ἕνα διδόμενο συνδυασμό (ἤ ὀρθότερα, διάταξη) συμβόλων συγκρίσεως (= , > , <), ἀπό τό σύνολο τῶν $3^{n}$ δυνατῶν "διατάξεων μετ' ἐπαναλήψεως" (§81).

§86 Ὁ ἐκθέτης n − p τοῦ ἀνωτέρω τύπου μ εἶναι ἴσος μέ τό πλῆθος τῶν ὑπολοίπων ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων πού δέν εἶναι ἴσα μέ τά συμμετρικά τους (δηλ. τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διδομένου ἰσομεροῦς, ἄρα καί ἀρτιοψηφίου, δεκαδικοῦ) ἀ σ χ έ τ ω ς ἐάν σέ καθένα ψηφίο ἀντιστοιχεῖ εἴτε τό σύμβολο > εἴτε τό < .

§87 Ὅπως γίνεται φανερό ἀπό τό περιεχόμενο τῶν §82, §84 καί §94, καθένας ἀπό τούς ἐκθέτες p καί n − p ἀποκτᾶ τήν πρέπουσα τιμή του μόνο ἀπό τό π λ ῆ θ ο ς τῶν συμβόλων (=, > , <) καί ὄ χ ι ἀπό τήν θ έ σ η πού τό κάθε σύμβολο ἔχει μέσα στή διάταξη.

§88 Ἰ σ ο δ ύ ν α μ ε ς ἔχουν ἤδη κληθῆ (§37) οἱ διατάξεις ἐκεῖνες πού περιέχουν τό ἴδιο πλῆθος συμβόλων ἰσότητος (=), ἐπειδή κάθε μιά τους παρέχει τήν ἴδια τιμή τοῦ ἐκθέτη p, ἄρα καί τήν ἴδια τιμή τοῦ ὑποσυνόλου μ. (§82).

§89 Ὅπως στούς ἀκεραίους (§38), ἔτσι καί στούς δεκαδικούς, τό σύνολο τῶν $3^{n}$ διατάξεων, καταγράφεται σέ ὁ μ ά δ ε ς ἰ σ ο δ υ ν ά μ ω ν δ ι α τ ά ξ ε ω ν .

§90 Καί γιά τούς δεκαδικούς ἰσχύει τό παράδειγμα τῆς §42 ἑνός 10-ψηφίου ἰσομεροῦς (συνεπῶς ἀρτιοψηφίου) στόν ὁποῖον ἔχουν καταγραφῆ ὅλες οἱ $3^{n} = 3^{4} = 81$ διατάξεις συμβόλων κατά ὁμάδες ἰσοδυνάμων διατάξεων.

§91 Ἰσχύει ἐπίσης τό θεώρημα τῆς §41 μέ τήν ἑξῆς διατύπωση :

6 Θ ε ώ ρ η μ α : Τό πλῆθος τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων συμβόλων συγκρίσεως (= , >, <) οἱ ὁποῖες ὑφίστανται στήν περιοχή τῶν n ἀριστερῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων ἑνός ν-ψηφίου ἰσομεροῦς ( $\nu \geq 4$ , $n \geq 1$ ), ἰσοῦται μέ $n+1$, ὅσο εἶναι τό πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(1+2)^n$. Τό πλῆθος τῶν ἰσοδυνάμων διατάξεων πού περιέχονται σέ κάθε ὁμάδα ἀκολουθεῖ τή σειρά καί τήν τιμή (ἀπό τῆς μονάδος) τῶν προσθετέων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ὡς ἄνω διωνύμου.

§92 Παράδειγμα : Γιά ἰσομερῆ 10-ψήφιο δεκαδικό ($\nu = 10$, $n = \frac{\nu-2}{2} = 4$), ἰσχύει τό παράδειγμα τῆς §42 ·1 ὡς ἔχει, μέ ἀνάλογη διατύπωση.

§93 Ἀπόδειξη τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος τῆς §91 : Ἰσχύει ἀπολύτως ἡ ἀπόδειξη τῆς §43 καθώς καί ἡ Παρατήρηση τῆς §44, μέ κατάλληλη ἀλλαγή φρασεολογίας.

§94 Γ ε ν ι κ ή ἐ φ α ρ μ ο γ ή ἐπί 16-ψηφίου ὀρθίου (§66) δεκαδικοῦ [ καταστάντος ἰσομεροῦς καί κατ' ἀκολουθίαν ἀρτιοψηφίου (§63 ·1)]:

$$> \overbrace{\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4\ \psi_5\ \psi_6\ \psi_7\ \psi_8}^{n=7} \,|\, \psi_9\ \psi_{10}\ \psi_{11}\ \psi_{12}\ \psi_{13}\ \psi_{14}\ \psi_{15}\ \psi_{16}$$

·1 Πλῆθος ψηφίων .................................................................. $\nu = 16$

·2 Πλῆθος τῶν 16-ψηφίων ὀρθίων δεκαδικῶν (ἰσομερῶν) (§65) = $45 \times 10^{14}$

·3 Πλῆθος n τῶν ἐσωτερικῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους (§72) $n = \frac{\nu-2}{2} = 7$

·4 Πλῆθος τῶν διατάξεων μετ'ἐπαναλήψεως τῶν συμβόλων συγκρίσεως (= , > , <) (§81) $= 3^n = 3^7 = 2187$

·5 Ἀνάπτυγμα τῆς δυνάμεως $3^{n=7} = 2187$ ὡς διωνύμου Νεύτωνος (§91) :

$$(1+2)^7 = \underset{1}{1} + \underset{2}{14} + \underset{3}{84} + \underset{4}{280} + \underset{5}{560} + \underset{6}{672} + \underset{7}{448} + \underset{8}{128} = 2187$$

·6 Πλῆθος τῶν ὁμάδων ἰσοδυνάμων διατάξεων (§88, §89, §90, §91) ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τούτου $= n+1 = 8$

·7 Τύπος ὑπολογισμοῦ τοῦ ἑκάστοτε πλήθους μ τῶν 16-ψηφίων ὀρθίων δεκαδικῶν πού ἀντιστοιχοῦν σέ κάθε ὁμάδα ἰσοδυνάμων διατάξεων (§82 ·2 , §84 ·1) :

$$\mu = 10^p \times 45^{n-p} \times 45^1 \ \ldots\ldots = 10^p \times 45^{n-p+1}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1η ὁμάδα | $p_1 = 7$ | $\mu_1 = 10^7 \times 45^1$ |
| 2η " | $p_2 = 6$ | $\mu_2 = 10^6 \times 45^2$ |
| 3η " | $p_3 = 5$ | $\mu_3 = 10^5 \times 45^3$ |
| 4η " | $p_4 = 4$ | $\mu_4 = 10^4 \times 45^4$ |
| 5η " | $p_5 = 3$ | $\mu_5 = 10^3 \times 45^5$ |
| 6η " | $p_6 = 2$ | $\mu_6 = 10^2 \times 45^6$ |
| 7η " | $p_7 = 1$ | $\mu_7 = 10^1 \times 45^7$ |
| 8η " | $p_8 = 0$ | $\mu_8 = 10^0 \times 45^8$ |

•8 Δέον ν' ἀποδειχθῆ ὅτι :

$$1\mu_1 + 14\mu_2 + 84\mu_3 + 280\mu_4 + 560\mu_5 + 672\mu_6 + 448\mu_7 + 128\mu_8 = 45 \times 10^{14}$$

ὅσο εἶναι δηλ. τό πλῆθος τῶν 16-ψηφίων ὀρθίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν. Ἤ :

$$45\cdot( 10^7 + 45\cdot10^6\cdot14 + 45^2\cdot10^5\cdot84 + 45^3\cdot10^4\cdot280 + 45^4\cdot10^3\cdot560 +$$
$$+ 45^5\cdot10^2\cdot672 + 45^6\cdot10^1\cdot448 + 45^7\cdot10^0\cdot128 ) =$$
$$45\cdot( 10^7 + 630\cdot10^6 + 170100\cdot10^5 + 25515000\cdot10^4 + 2296350000\cdot10^3 +$$
$$+ 124002900000\cdot10^2 + 3720087000000\cdot10^1 + 4782969000000) =$$
$$45 \times 10^7( 1 + 63 + 1701 + 25515 + 229635 + 1240029 + 3720087 + 4782969) =$$
$$= 45 \times 10^7 \times 10^7 = \underline{45 \times 10^{14}}$$

•9 Τό ἀμέσως προηγούμενο ἄθροισμα (μέσα σέ παρενθέσεις) εἶναι ὁ ἀριθμός $10^7$ . Καί αὐτό ἀποδεικνύεται κατά τόν ἴδιο τρόπο πού ἀνεπτύχθη στίς §45 •9 καί §45 •10 .

## ΚΕΦ. 5 ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΙ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΣΤΑΘΜΕΣ

§95 Ἀ ν ά σ τ ρ ο φ ο ς δοθέντος ν-ψηφίου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἐξ ἀρχῆς ἰσομεροῦς ἤ μεταλλαχθέντος εἰς ἰσομερῆ (§62) καί συνεπῶς ἀρτιοψηφίου μέ $\nu \geqq 4$, ἄς κληθῆ ὁ ἰσοψήφιος ἰσομερής πού διαβάζεται καί γράφεται κατ' ἀνάστροφη (κατοπτρική) φορά ὡς πρός τόν διδόμενο (π.χ. οἱ

| | | | |
|---|---|---|---|
| δεκαδικοί | 010,003 | 905,700 | 823,456 |
| ἔχουν ἀναστρόφους τούς | 300,010 | 007,509 | 654,328). |

§96 •1 Θ ε ώ ρ η μ α : Ἡ διαφορά D μεταξύ ἑνός δεκαδικοῦ ν-ψηφίου ὀρθίου ἰσομεροῦς ἀριθμοῦ C (θετικοῦ) καί τοῦ ἀναστρόφου του Ɔ (D=C-Ɔ), προστιθεμένη στόν ἀνάστροφο της ᗡ δίδει
7 ἄθροισμα Σ πού εἶναι δεκαδικός, πολλαπλάσιο τοῦ 3, μέ ν ἤ ν+1 ψηφία μεταξύ τῶν ὁποίων οὐδέποτε ὑπάρχουν τά ψηφία 2, 3, 4, 5, 6, 7. Τό Σ εἶναι κοινό γιά ὅλους τούς ν-ψηφίους δεκαδικούς τούς ὑπαγομένους στήν ἴδια ψηφιακή διάταξη μέ τόν C ἀνεξάρτητο δέ ἀπό τήν τιμή τῶν ψηφίων παντός δεκαδικοῦ.

•2 Τό ἄθροισμα Σ ἄς κληθῆ σ τ ά θ μ η τοῦ C .

§97 •1 Πρό τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος δίδονται, ὡς παραδείγματα, διάφορα ὑποσύνολα ὀρθίων ἰσομερῶν δεκαδικῶν ($\psi_1 > \psi_\nu$) , κατ' ἀνάγκην ἀρτιοψηφίων (§63 •1), καθένα τῶν ὁποίων ὑπάγεται στήν ἴδια ψηφιακή διάταξη, ἐπί τῶν ὁποίων ἐκτελεῖται ἡ ὡς ἄνω διαδικασία τῆς ἀναστροφῆς :

| ν = 2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | C | 1,0 | 3,1 | 7,2 | 9,8 |
| − | Ɔ | 0,1 | 1,3 | 2,7 | 8,9 |
| | D | 0,9 | 1,8 | 4,5 | 0,9 |
| + | ᗡ | 9,0 | 8,1 | 5,4 | 9,0 |
| | Σ | 9,9 | 9,9 | 9,9 | 9,9 |

| ν = 4 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | =\| | =\| | =\| |
| | C | 99,90 | 70,06 | 26,60 |
| − | Ɔ | 09,99 | 60,07 | 06,62 |
| | D | 89,91 | 09,99 | 19,98 |
| + | ᗡ | 19,98 | 99,90 | 89,91 |
| | Σ | 109,89 | 109,89 | 109,89 |

| ν = 10 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | >≤=> \| | >≤=> \| | >≤=> \| |
| − | C | 61234,03500 | 18032,03910 | 91237,03900 |
| | Ɔ | 00530,43216 | 01930,23081 | 00930,73219 |
| + | D | 60703,60284 | 16101,80829 | 90306,30681 |
| | ᗡ | 48206,30706 | 92808,10161 | 18603,60309 |
| | Σ | 108909,90990 | 108909,90990 | 108909,90990 |

§97 ·2 , ·3 , ·4 , ·5 καί ·6 . Αἱ πρόσθεν ὑποπαράγραφοι τῆς §48 ἰσχύουν καί διά τούς δεκαδικούς.

§98 Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τῆς §96 εἶναι ὁμοιότυπος τῆς ἀποδείξεως στήν §49. Ὁ ἐκεῖ λαμβανόμενος ἀκέραιος 586683 ἀρκεῖ νά ἐξομοιωθῆ μέ τόν δεκαδικό 586,683 (ἰσομερῆ, ὄρθιο). Ἰσχύουν καί ὅλα τά περί ψηφιακῶν συνδυασμῶν τῶν ὑποπαραγράφων ·7 καί ·16, καταλλήλως ἁρμοζόμενα.

§99 Τά εἰς τήν §50 ἐκτιθέμενα (ἀπό ·1 ἕως ·9 περί τῶν ἰδιοτήτων πού παρουσιάζουν οἱ στάθμες Σ, καθώς καί τά 8 Πορίσματα) ἰσχύουν καί γιά τούς δεκαδικούς, ἐφ' ὅσον προσαρμοσθοῦν καταλλήλως. Εἰδικῶς τό πόρισμα $4^{ον}$ πρέπει νά διατυπωθῆ ὡς ἑξῆς :

Ἡ στάθμη Σ οἱουδήποτε ὀρθίου ἰσομεροῦς ν-ψηφίου δεκαδικοῦ, εἶναι εἴτε δεκαδικός μή ἰσομερής μέ ν+1 ψηφία, εἴτε ἰσομερής μέ ν ψηφία (ἡ θέση δέ τῆς ὑποδιαστολῆς του ἀφήνει τό δεκαδικό μέρος τῆς Σ μέ $\frac{ν}{2}$ ψηφία). Ἐπειδή δέ ἡ Σ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 (§99 & §50 ·12, πόρισμα 3) ἀναλύεται σέ γινόμενο τοῦ $99 \times 10^{-\frac{ν}{2}}$ ἐπί ἕνα παράγοντα f πού ἀρχίζει ἀπό τήν μονάδα καί τόν ὁποῖον f συγκροτοῦν, γιά κάθε περίπτωση, μόνο μονάδες καί μηδενικά [καί σέ μιά μόνο περίπτωση μόνο μονάδες (§101 Πίναξ)]. Τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ παράγοντος αὐτοῦ f εἶναι ν-1 καί ἡ ἐναλλαγή μονάδων καί μηδενικῶν σέ κάθε περίπτωση στάθμης, ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ψηφιακό συνδυασμό τοῦ διδομένου δεκαδικοῦ καί ἀκολουθεῖ, ὅπως ἐλέχθη (§50 ·8), τή νομοτέλεια τῆς §102.

§100 Τό θεώρημα τῆς §51 δέν ἰσχύει, ἐπειδή στούς ἰσομερεῖς δεκαδικούς δέν ἐνυπάρχει περιττοψήφιος (§64).

§101

## Π Ι Ν Α Ξ

### ΔΙΑ ν-ΨΗΦΙΟΥΣ ΟΡΘΙΟΥΣ ΙΣΟΜΕΡΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ

| | | |
|---|---|---|
| n | ΠΛΗΘΟΣ ΑΡΙΣΤΕΡΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ | (§72) |
| Ψ Δ | ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ (=,>,<) | (§81) |
| ΟΜΙ | ΟΜΑΔΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ | (§91) |
| μ | ΠΛΗΘΟΣ ν-ΨΗΦΙΩΝ ΟΡΘΙΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΝΑ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΜΒΟΛΩΝ | (§82) |
| Σ | ΣΤΑΘΜΕΣ ΚΑΤΑ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΙΜΗ | (§96) |

| ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΟΡΘΙΟΙ ΙΣΟΜΕΡΕΙΣ | ν | n | Ψ Δ | ΟΜ Ι | μ | Σ | = | $99\cdot10^{-\frac{\nu}{2}}\times$ | f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_1 , \psi_2$ | 2 | - | - | - | $45^1$ | 9,9 | = | 9,9 × | 1 ◀ |
| $\psi_1\psi_2 , \psi_3\psi_4$ | 4 | 1 | 3 | 2 | | | | | |
| 1 = | | | | | $10^1\times45^1$ | 109,89 | = | 0,99 × | 111 ◀ |
| 2 > ] | | | | | $10^0\times45^2$ | 108,90 | = | 0,99 × | 110 |
| 3 < ] | | | | | $10^0\times45^2$ | 99,99 | = | 0,99 × | 101 |
| $\psi_1\psi_2\psi_3 , \psi_4\psi_5\psi_6$ | 6 | 2 | 9 | 3 | | | | | |
| 1 = = | | | | | $10^2\times45^1$ | 1099,989 | = | 0,099 × | 11111 ◀ |
| 2 > = | | | | | $10^1\times45^2$ | 1099,890 | = | 0,099 × | 11110 |
| 3 = > ] | | | | | $10^1\times45^2$ | 1098,900 | = | 0,099 × | 11100 |
| 4 > > ] | | | | | $10^0\times45^3$ | | | | |
| 5 = < | | | | | $10^1\times45^2$ | 1090,089 | = | 0,099 × | 11011 |
| 6 > < | | | | | $10^0\times45^3$ | 1089,990 | = | 0,099 × | 11010 |
| 7 < > | | | | | $10^0\times45^3$ | 999,999 | = | 0,099 × | 10101 |
| 8 < < | | | | | $10^0\times45^3$ | 991,089 | = | 0,099 × | 10011 |
| 9 < = | | | | | $10^1\times45^2$ | 990,099 | = | 0,099 × | 10001 |
| $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 , \psi_5\psi_6\psi_7\psi_8$ | 8 | 3 | 27 | 4 | | | | | |
| 1 = = = | | | | | $10^3\times45^1$ | 10999,9989 | = | 0,0099· | 1111111 ◀ |
| 2 > = = | | | | | $10^2\times45^2$ | 10999,9890 | = | 0,0099· | 1111110 |
| 3 = > = ] | | | | | $10^2\times45^2$ | 10999,8900 | = | 0,0099· | 1111100 |
| 4 > > = ] | | | | | $10^1\times45^3$ | | | | |
| 5 > > > ] | | | | | $10^0\times45^4$ | 10998,9000 | = | 0,0099· | 1111000 |
| 6 = = > ] | | | | | $10^2\times45^2$ | | | | |
| 7 = > > ] | | | | | $10^1\times45^3$ | | | | |
| 8 > = > ] | | | | | $10^1\times45^3$ | | | | |
| 9 = = < | | | | | $10^2\times45^2$ | 10990,0989 | = | 0,0099· | 1110111 |
| 10 > = < | | | | | $10^1\times45^3$ | 10990,0890 | = | 0,0099· | 1110110 |
| 11 > > < ] | | | | | $10^0\times45^4$ | 10989,9900 | = | 0,0099· | 1110100 |
| 12 > < < ] | | | | | $10^0\times45^4$ | | | | |
| 13 = > < ] | | | | | $10^1\times45^3$ | | | | |
| 14 = < > | | | | | $10^1\times45^3$ | 10900,0089 | = | 0,0099· | 1101011 |
| 15 > < > | | | | | $10^0\times45^4$ | 10899,9990 | = | 0,0099· | 1101010 |
| 16 = < < | | | | | $10^1\times45^3$ | 10891,0989 | = | 0,0099· | 1100111 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | = < = | | $10^2 \times 45^2$ | 10890,1089 = 0,0099·1100011 |
| 18 | > < = | | $10^1 \times 45^3$ | 10890,0990 = 0,0099·1100010 |
| 19 | < > = | | $10^1 \times 45^3$ | 10009,8999 = 0,0099·1011101 |
| 20 | < > > | | $10^0 \times 45^4$ | 10008,9099 = 0,0099·1011001 |
| 21 | < > < | | $10^0 \times 45^4$ | 9999,9999 = 0,0099·1010101 |
| 22 | < < > | | $10^0 \times 45^4$ | 9910,0089 = 0,0099·1001011 |
| 23 | < = > | | $10^1 \times 45^3$ | 9909,9099 = 0,0099·1001001 |
| 24 | < < < ] | | $10^0 \times 45^4$ | |
| 25 | < = < ] | | $10^1 \times 45^3$ | 9901,0989 = 0,0099·1000111 |
| 26 | < < = | | $10^1 \times 45^3$ | 9900,1089 = 0,0099·1000011 |
| 27 | < = = | | $10^2 \times 45^2$ | 9900,0099 = 0,0099·1000001 |

§102 Κ α ν ώ ν ἀμέσου ὑπολογισμοῦ τῆς στάθμης Σ διδομένου ὀρθίου ἰσομεροῦς δεκαδικοῦ, χωρίς τίς πράξεις ἀναστροφῆς (§95 & §46).

·1 Δίδεται 18-ψήφιος ὄρθιος ἰσομερής δεκαδικός μέ τή μορφή 18 ψηφιακῶν θέσεων ($\nu = 18$, $n = \frac{18-2}{2} = 8$). Κάτω ἀπό κάθε ψηφιακή θέση, ἀριστερά καί δεξιά τῆς ὑποδιαστολῆς, ἄς σχηματισθῆ τυχοῦσα διάταξη συμβόλων συγκρίσεως (ἐκ τῶν $3^8 = 6561$ δυνατῶν) :

| $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\psi_3$ | $\psi_4$ | $\psi_5$ | $\psi_6$ | $\psi_7$ | $\psi_8$ | $\psi_9$ | , | $\psi_{10}$ | $\psi_{11}$ | $\psi_{12}$ | $\psi_{13}$ | $\psi_{14}$ | $\psi_{15}$ | $\psi_{16}$ | $\psi_{17}$ | $\psi_{18}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| > | = | > | = | > | = | < | > | < | \| | > | < | > | = | < | = | < | = | < |

·2 Ἡ στάθμη Σ (§96 ·2) ἑνός δεκαδικοῦ ὀρθίου, εἶναι τό γινόμενο $99 \times 10^{-\frac{\nu}{2}} \times f$, ὁ δέ παράγων f ἔχει πάντοτε ν-1 ψηφία (§99, §50 ·13, ·14 Πίναξ §101) (μηδενικά καί μονάδες), ὅσα εἶναι δηλ. τά μεσοδιαστήματα μεταξύ πρώτου καί τελευταίου ψηφίου τοῦ διδομένου δεκαδικοῦ.

·3 Ἡ ν ο μ ο τ έ λ ε ι α πού ὑφίσταται μεταξύ συμβόλων καί ψηφίων τοῦ f ἔχει καί στή περίπτωση τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τήν αὐτή διατύπωση πού ἀνεπτύχθη γιά τούς ἀκεραίους στήν §54 ·3, ·4 καί ·5 .

·4 Π α ρ ά δ ε ι γ μ α . Δίδεται συγκεκριμένος 18-ψήφιος ὄρθιος δεκαδικός, καταστάς ἰσομερής, ὑπαγόμενος στήν ἐκλεγεῖσα ὡς ἄνω διάταξη :

Ἐπαλήθευση δι' ἀναστροφῆς :

```
 _C =  807294561 , 237412000
  Ɔ =  000214732 , 165492708
      -----------------------
  D =  807079829 , 071919292
 +ᗡ =  292919170 , 928970708
      -----------------------
  Σ = 1099999000 , 000890000
      └─── V+1= 19 ψηφία ───┘
```

Ἐφαρμογή τοῦ Κανόνα :

```
     8 0 7 2 9 4 5 6 1 , 2 3 7 4 1 2 0 0 0
     > = > = > = < > < | > < > = < = < = <
f =  1 1 1 1 1 1 0 1  0  1 0 1 1 0 0 0 0
     └──────── V-1= 17 ψηφία ─────────┘
```

$\Sigma = 99 \times 10^{-\frac{\nu}{2}} \cdot f = 0{,}000000099 \cdot f = 0{,}000000099 \cdot 11111101010110000$

Τοῦ ἰδίου :

1. Ἡ μεθοδολογία τῆς ἐν ἐργαστηρίῳ εὑρέσεως τῶν νόμων τῆς πτήσεως δι' εὐκάμπτων ταχυπαλινδρομικῶν πτερύγων (λύσις τοῦ προβλήματος τῆς "φυσικῆς πτήσεως")(Ἀεροδυναμική-Βιοφυσική) (1934 ἕως 1977)
2. Μελέτη καί κατασκευή πρωτοτύπου "κλειδιοῦ κοχλιώσεως ἐλευθέρως ἀντιστρεφομένου" (Δίπλ.Εὑρ.N° 890780/8-8-51 τοῦ Deutsches Patentamt, München) (Κινητική Γεωμετρία) (1951)
3. " Ἀντισεισμικά τοιχώματα οἰκοδομῶν" (Δ.Ε.15606) (Στατική) (1954)
4. "Πυκνόστυλα ἀντισεισμικά τοιχώματα" (Δ.Ε.16566, Ἐγκριτική Πρᾶξις 365/7-9-55 Συμβ.Δημ."Ἔργων) (Στατική)(1955)
5. Σύγγραμμα : " Ἡ διά μητρώου ἐπίλυσις τῆς συνεχοῦς δοκοῦ " σταθερᾶς ροπῆς ἀδρανείας. Τόμ.Α' (Στατική) (1959)
6. Σύγγραμμα : " Ἡ διά μητρώου ἐπίλυσις τῆς συνεχοῦς δοκοῦ " μεταβλητῆς ροπῆς ἀδρανείας·Τόμ.Β' (Στατική) (1963)
7. " Ὁρίζουσαι ἀναπτυκταί εἰς γινόμενα ἐλασσόνων "(Μαθημ.) (1963)
8. "Νέος τρόπος διερευνήσεως τῆς Σελήνης ἤ ἄλλου πλανήτου μέ διαστημικήν συσκευήν"(Μελέτη ἀναπτυχθεῖσα ἐνώπιον τοῦ 16ου Διεθν.Ἀστρον.Συνεδρίου Ἀθηνῶν) (Διαστημική) (1965)
9. "Βελτιώσεις εἰς τήν προσπάθειαν προσεδαφίσεως-ἀπεδαφίσεως ἐπί καί ἀπό πλανητικῆς ἐπιφανείας" (Μελέτη παρουσιασθεῖσα εἰς τό 17ον Διεθ.Ἀστρον.συνέδριον Μαδρίτης) (Διαστημική) (1966)
10. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ ἀπλανητικοῦ τηλεφακοῦ καί ἡ σχεδίασίς του (Γεωμετρική Ὀπτική) (1966)
11. Πρώτη γραφαναλυτική λύσις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $a^x + b^x = 1$ (Μαθηματικά) (1968)
12. Δευτέρα γραφαναλυτική λύσις τῆς ὡς ἄνω συναρτήσεως (Μαθημ) (1969)
13. Ἡ λογαριθμική καμπύλη τῶν δυνάμεων. (Μαθηματικά) (1969)
14. " Ἡ ἐξερεύνησις πλανητῶν διά συμπορευομένων διαστημοπλοίων " (Μελέτη ἀναπτυχθεῖσα ἐνώπιον τῆς Παγκοσμίου Διασκέψεως Διαστημικῆς Τεχνολογίας εἰς Χανιά) (Διαστημ.) (1969)
15. "Γραφαναλυτική εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ καί τοῦ κεντροειδοῦς πάσης ἐπιπέδου ἐπιφανείας" (Μαθηματικά) (1970)
16. Γραφαναλυτικός προσδιορισμός τῆς ροπῆς καί τοῦ γινομένου ἀδρανείας πάσης ἐπιπέδου ἐπιφανείας (Μαθηματικά) (1970)
17. Γραφική εὕρεσις τῶν οἱωνδήποτε ριζῶν τῆς ἐξισώσεως β' βαθμοῦ (Μαθηματικά) (1972)
18. Ἀκριβής "προσεγγιστική τριχοτόμησις γωνίας διά κανόνος καί διαβήτου" (Μαθηματικά) (1974)

→

19. 'Ακριβής "προσεγγιστική πολυτόμησις γωνίας κατά πάντα περιττόν ἀριθμόν, διά κανόνος καί διαβήτου" (Μαθηματικά) (1974)

20. Παραβολόσχημο ἀπειρεστιακό κάτοπτρο, γιά τήν ἀξιοποίηση τῆς ἡλιακῆς ἐνεργείας (Μελέτη καί σχεδίαση) (Φυσική-Μαθηματικά) (1977)

21. Μελέτη καί σχεδίαση "πλωτῆς συσκευῆς πού ἐπιτρέπει τήν ἀπόληψη ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἀπό τήν ρύμη τῶν πρός τίς ἀκτές ἐφορμώντων θαλασσίων κυμάτων" (προσπάθεια τῆς ἀξιοποιήσεως ἀνεκμεταλλεύτων πηγῶν ἐνεργείας). Κατασκευή προτύπου-ἀπονομή χρυσοῦ βραβείου ὑπό τῆς 'Ελλ.'Ετ.'Ερευνῶν-'Εφευρέσεων. (1981)

---

Κ Ω Ν Σ Τ . Ν Ι Κ . Π Α Π Α Δ Α Κ Η Σ , ΔΡ ΜΗΧ.

ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ Ξ.Μ.Π.

ΟΔΟΣ ΑΓΙΟΥ ΜΕΛΕΤΙΟΥ 121, Α Θ Η Ν Α Ι (Τ 821)

ΤΗΛΕΦ. 86 74 650